DS 9 mathématiques

BCPST 1B 2017-2018

— Durée : 3 heures

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. E désigne un espace vectoriel réel sur $\mathbb{R}$, et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
On désigne par a un réel non nul et on considère l'endomorphisme f_a de E, défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

1. (a) Écrire la matrice A_a de f_a relativement à la base B et calculer A_a^2.

   (b) l'application f_a est-elle inversible ?

2. On pose $u_1 = ae_1 + e_2 - ae_3$.

   (a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, e_2, e_3)$ est une base de E.

   (b) Vérifier que la matrice de f_a relativement à la base $\mathcal{B}'$ est $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Dans la suite, on cherche à caractériser les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = f_a$.

3. On suppose qu'un tel endomorphisme g existe et on note M sa matrice dans $\mathcal{B}'$.

   (a) Expliquer pourquoi $M^2 = K$ puis montrer que $MK = KM$.

   (b) Déduire de ces deux relations que $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, x, y et z étant 3 réels tels que $xz = 1$.

4. Réciproquement, vérifier que tout endomorphisme g dont la matrice dans $\mathcal{B}'$ est du type ci-dessus est solution de $g \circ g = f_a$.

Correction

1. (a) Représentons f_a dans la base $\mathcal{B}$:

$$A_a = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}, A_a^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b) Supposons que f_a inversible. Dans ce cas, A_a serait inversible. Or $A_a^2 = 0_2$.
   En multipliant par A_a^{-1}, on aurait $A_a = 0_2$, ce qui est absurde. Donc A_a et f_a ne sont pas inversibles.

2. (a) Montrons que $\mathcal{B}'$ est une base. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ des réels tels que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 = 0_E$. Donc

$$\begin{cases} \lambda_1 a & = & 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 & = & 0 \\ -\lambda_1 a + \lambda_3 & = & 0 \end{cases}$$

   Or $a \neq 0$. Donc $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 0$. Donc $\mathcal{B}'$ est une famille libre de E. Mais $\dim(E) = 3$ et $\mathrm{Card}(\mathcal{B}') = 3$. Donc $\mathcal{B}'$ est bien une base.

(b) En calculant, on a $f(u_1) = 0_E, f(e_2) = 0_E, f(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3 = u_1$. Donc

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. (a) M représente g dans la base $\mathcal{B}'$. Donc M^2 représente $g \circ g$ dans la base $\mathcal{B}'$. Mais $g \circ g = f_a$. Donc $g \circ g$ est représentée par K dans la base $\mathcal{B}'$. D'où $M^2 = K$. On a : $MK = MM^2 = M^3$. et $KM = M^2M = M^3$. Donc $KM = MK$.

   (b) On pose $M = \begin{pmatrix} a & x & y \\ b & c & z \\ d & e & f \end{pmatrix}$. On a alors

$$MK = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}, KM = \begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Donc $d = 0, e = 0, b = 0, a = f$. D'où

$$M^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ax + xc & ay + xz + yf \\ 0 & c^2 & cz + zf \\ 0 & 0 & f^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   Donc $a = 0, c = 0, f = 0, xz = 1$.

4. Réciproquement, Soit g un endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}'$ est représentée par M vérifiant les conditions précédentes. On a donc $M^2 = K$. En traduisant en terme d'application linéaire, on a donc $g \circ g = f_a$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(u)^n \sin(u)}{1+\cos(u)^2} du$.

1. En posant $x = \cos(u)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx$.
2. Calculer I_0, I_1.
3. Pour tout $p \geq 1$, on pose $R_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{p + \frac{k^2}{p}}$. Justifier que $(R_p)_{p\geq 1}$ est une suite convergente. Quelle est sa limite ?
4. (INFO) Écrire une fonction `R(p)` qui retourne la valeur de R_p.
5. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$.
6. (INFO) Écrire une fonction `I(n)` qui retourne la valeur de I_n. On suppose que la variable A contient la valeur π et la variable B contient la valeur $\ln(2)$.
7. Soit $n \geq 0$. À l'aide de la récurrence, déterminer une expression de I_{2n} et de I_{2n+1} sous forme de somme.

Correction

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $x = \cos(u)$. La fonction cos étant bien C^1 sut $[0, \frac{\pi}{2}]$, on peut effectuer ce changement de variable. On a $dx = -\sin(u)du$. La nouvelle expression à intégrer est donc :

$$\frac{x^n(-dx)}{1+x^2}.$$

   Ainsi :

$$I_n = \int_1^0 \frac{u^n(-du)}{1+u^2}.$$

   D'où

$$\boxed{I_n = \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x^2}.}$$

2. On a $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$ et $I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = [\frac{\ln(1+x^2)}{2}]_{x=0}^{x=1} = \frac{\ln(2)}{2}$.

3. Soit $p \geq 1$, on a $R_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{p+\frac{k^2}{p}} = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{1+\frac{k^2}{p^2}}$. R_p est donc une somme de Riemann associée à la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui est une fonction continue sur le segment $[0,1]$. La suite $(R_p)_{p\geq 1}$ converge donc vers $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = I_0$. Donc cette suite converge vers $\frac{\pi}{4}$.
4.
```
def R(p) :
    S=0
    if p==0 :
        print("erreur")
        return
    else :
        for j in range(p+1) :
            S=S+1/(p+(k**2)/p)
        return S
```

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} I_{n+2} &= \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(x^2+1-1)}{1+x^2} dx \\ &= \int_0^1 (x^n - \frac{x^n}{1+x^2}) dx \\ &= \int_0^1 x^n dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \\ &= \boxed{\frac{1}{n+1} - I_n}. \end{aligned}$$

6.
```
def I(n) :
    if n==0 :
        return A/4
    if n==1 :
        return B/2
    else :
        S=0
        k=0
        if n%2==0 :
            S=A/4
            k=0
        else :
            S=B/2
            k=1
        while k<n :
            S=(1/k+1)-S
            k=k+2
        return S
```

7. Soit $n \geq 0$. On a $I_{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{2k-1} + (-1)^n \frac{\pi}{4}$ et $I_{2n+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{2k} + (-1)^n \frac{\ln(2)}{2}$.

Exercice 3. Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges, et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

I Premier protocole

Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier roi rouge et $E(X)$ son espérance.

1. (INFO) Écrire une fonction `aleatoireUn(n)` qui retourne X. On rappelle que `randint(0,n)` renvoie un entier compris entre 0 et n inclus.
2. Montrer : $\forall k \in \{1, ..., 2n-1\}, P(X = k) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$
3. Montrer : $E(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.
4. Le joueur paie un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros losqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a - k$. Déterminer l'espérance de la variable aléatoire G_1.

II Deuxième protocole

Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes. Le joueur paie un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge. On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a - k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

1. (INFO) Écrire une fonction `AleaDeux(n)` qui simule la variable aléatoire G_2.
2. Pour tout entier $k \in \{1, ..., n\}$, déterminer $P(G_2 = a - k)$.
3. Vérifier : $P(G_2 = -n) = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$.
4. Montrer : $E(G_2) = \dfrac{3(3n-1)a - \left(7n^2 - 1\right)}{6(2n-1)}$.

III Comparaison des deux protocoles

1. On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.

Correction

1 Premier protocole

1.
```
def aleatoireUn(n) :
    L=[i for i in range(2*n)]
    k=1
    for i in range(2*n) :
        r=random.randint(len(L)-1)
        if L[r]==0 or L[r]==1 :  #dans cette modélisation, 0,1 sont des rois rouges.
            return k
        else :
            k=k+1
            del(L[r])
```

2. On pose $\Omega = \{(\omega_1, \cdots, \omega_{2n}, \forall i \neq j, \omega_i \neq \omega_j\}$. Cet univers correspond à l'ensemble des dispositions possibles pour les cartes.
   D'après l'énoncé, Ω est muni d'une probabilité uniforme. Soit $k \in \{1, \cdots, 2n-1\}$. On cherche à décrire l'événement $(X = k)$. Par définition, on a
   $$(X = k) = \{(\omega_1, \cdots, \omega_k, \cdots, \omega_n) \in \Omega | \omega_k \in \{RCa, RC\text{œ}\}, \forall i < k, \omega_i \notin \{RCa, RC\text{œ}\}\}.$$
   On cherche à dénombrer cet ensemble. Pour cela, on commence par placer les rois rouges. Pour l'emplacement k, on constate que l'on a 2 possibilités. Après avoir placé le premier roi rouge, le deuxième a comme emplacements possibles les éléments de $k+1$ à $2n$. Ce qui en fait $2n-k$. Il reste à placer $2n-2$ cartes sur $2n-2$ emplacements restants. On a donc
   $$\mathrm{Card}((X = k)) = 2(2n-k)(2n-2)!.$$
   Ω étant muni de la probabilité uniforme, il en résulte que
   $$P((X = k)) = \frac{2(2n-k)(2n-2)!}{(2n)!} = \frac{2(2n-k)}{(2n-1)2n} = \frac{2n-k}{n(2n-1)}.$$
3. D'après le théorème de transfert, on a
   $$\begin{aligned}
   E(X) &= \textstyle\sum_{k=1}^{2n-1} P(X = k)k \\
   &= \textstyle\sum_{k=1}^{2n-1} \frac{2n-k}{n(2n-1)} k \\
   &= \textstyle\frac{1}{n(2n-1)} (\sum_{k=1}^{2n-1} 2nk - \sum_{k=1}^{2n-1} k^2) \\
   &= \textstyle\frac{1}{n(2n-1)} (2n\frac{(2n-1)(2n)}{2} - \frac{(2n-1)(2n)(4n-1}{6}) \\
   &= \textstyle\frac{1}{n(2n-1)} (2n^2(2n-1) - \frac{n(2n-1)(4n-11)}{3}) \\
   &= \textstyle\frac{1}{n(2n-1)} (2n^2(2n-1) - \frac{n(2n-1)(4n-1)}{3}) \\
   &= \textstyle\frac{n(2n-1)}{3n(2n-1)} (6n - (4n-1)) \\
   &= \textstyle\frac{2n+1}{3}
   \end{aligned}$$
4. Par définition, $G_1 = a - X$. Donc $E(G_1) = E(a - X)$. Par linéarité, on en déduit que
   $$E(G_1) = a - \frac{2n+1}{3} = \frac{3a-2n-1}{3}.$$

2 Deuxième protocole

1. On suppose dans le programme que `a` est une variable contenant la valeur de a.

```
def aleatoireDeux(n) :
     L=[i for i in range(2*n)]
           k=1
           for i in range(0,n) :
               r=random.randint(len(L)-1)
               if L[r]==0 or L[r]==1 :  #dans cette modélisation, 0,1 sont des rois rouges.
                   return a-k
               else :
                   k=k+1
                   del(L[r])
           return -n
```

2. Soit $k \in \{1, \cdots, n\}$. On garde les notation précédente. On a

$$P(G_2 = a - k) = P(X = k) = \frac{2n - k}{n(2n-1)}.$$

Déterminons $P(G_2 = -n)$. L'événement $(G_2 = -n)$ est complémentaire de l'événement $\cup_{k=1}^{n}(X = k)$. Donc

$$P(G_2 = -n) = 1 - P\left(\cup_{k=1}^{n}(X = k)\right)$$

Or les événements $(X = k)_{1 \leq k \leq n}$ sont deux à deux incompatibles. D'où

$$P(G_2 = -n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} P(X = k).$$

D'où

$$P(G_2 = -n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{2n - k}{n(2n-1)}.$$

Donc

$$\begin{aligned}
P(G_2 = -n) &= \tfrac{1}{n(2n-1)}\left(n(2n-1) - \textstyle\sum_{k=1}^{n}(2n-k)\right) \\
&= \tfrac{1}{n(2n-1)}\left(2n^2 - n - 2n^2 + \tfrac{n(n+1)}{2}\right) \\
&= \tfrac{1}{2n(2n-1)}\left(-2 + n + 1\right) \\
&= \tfrac{n-1}{2(2n-1)}
\end{aligned}$$

3. Par définition,

$$E(G_2) = \sum_{k=1}^{n} P(G_2 = a - k)(a - k) - P(G_2 = -n)n.$$

D'où

$$\begin{aligned}
E(G_2) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \tfrac{(2n-k)(a-k)}{n(2n-1)} - \tfrac{n(n-1)}{2(2n-1)} \\
&= \tfrac{1}{2n(2n-1)}\left(\textstyle\sum_{k=1}^{n} 2((2n-k)(a-k) - n^2(n-1)\right) \\
&= \tfrac{1}{2n(2n-1)}\left(2\textstyle\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4a\sum_{k=1}^{n} n - 2(2n+a)\sum_{k=1}^{n} k - n^2(n-1)\right) \\
&= \tfrac{1}{2n(2n-1)}\left(\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{3} + 4an^2 - (2n+a)n(n+1) - n^2(n-1)\right) \\
&= \tfrac{n}{6n(2n-1)}\left((n+1)(2n+1) + 12an - 3(2n+a)(n+1) - 3n(n-1)\right) \\
&= \tfrac{1}{6(2n-1)}\left(2n^2 + 3n + 1 + 12an - 6n^2 - 6n - 3an - 3a - 3n^2 + 3n)\right) \\
&= \tfrac{1}{6(2n-1)}\left(-7n^2 + 1 + 9an - 3a)\right) \\
&= \tfrac{1}{6(2n-1)}\left(3a(3n-1) - (7n^2 - 1)\right)
\end{aligned}$$

3 Comparaison des deux protocoles

Pour cela, on compare $E(G_1)$ à $E(G_2)$. Pour $n = 16$. On a

$$\begin{array}{llll}
 & E(G_1) & \geq & E(G_2) \\
\Leftrightarrow & \frac{3a-2n-1}{3} & \geq & \frac{1}{6(2n-1)}\left(3a(3n-1) - (7n^2-1)\right) \\
\Leftrightarrow & 2(2n-1)(3a-2n-1) & \geq & \left(3a(3n-1) - (7n^2-1)\right) \\
\Leftrightarrow & (6(2n-1) - 3(3n-1))a & \geq & 2(2n+1)(2n-1) - (7n^2-1) \\
\Leftrightarrow & (3n-3)a & \geq & 8n^2 - 2 - 7n^2 + 1 \\
\Leftrightarrow & (3n-3)a & \geq & n^2 - 1 \\
\Leftrightarrow & a & \geq & \frac{n^2-1}{3n-3} \qquad (3n-3) > 0) \\
\Leftrightarrow & a & \geq & \frac{n+1}{3} \\
\Leftrightarrow & a & \geq & \frac{17}{3} \qquad (n = 16) \\
\Leftrightarrow & a & \geq 5 + \frac{2}{3} &
\end{array}$$

On rappelle que a est un entier strictement positif. Le premier protocole est donc plus intéressant si le gain a est d'au moins de 6 euros. Sinon, il vaut mieux jouer avec le deuxième protocole.

Exercice 4. On considère l'équation différentielle suivante :

$$y' = 2 + 3y + y^2, y(0) = 0. \tag{E}$$

On se place sur l'intervalle $I = [0, \frac{1}{2}]$.

1. (INFO) Écrire une fonction `Euler(n)` qui retourne les listes $[y_0, \cdots, y_n]$ et $[t_0, \cdots, t_n]$ permettant de construire une solution approchée de (E).
2. On cherche une primitive de la fonction f définie par

$$\forall x \in I, f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}.$$

   (a) Montrer que pour tout $x \in I, f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$.

   (b) En déduire une primitive de f.
3. On veut résoudre l'équation (E).

   (a) Soit y une solution de cette équation différentielle. On suppose que $2+3y+y^2$ ne s'annule pas sur I. Montrer que

$$\forall s \in I, \frac{y'(s)}{y(s)+1} - \frac{y'(s)}{y(s)+2} = 1$$

   (b) Soit $t \in I$. Montrer que $\ln(y(t)+1) - \ln(y(t)+2) + \ln(2) = t$.

   (c) En déduire une expression de y.

   (d) Vérifier que la fonction trouvée est solution de (E).

Correction

1.
```
def Euler(n) :
    a=0
    T=[a+i/(2*n) for i in range(n+1)]
    Y=[0]
    for i in range(n) :
        A=Y[i]+(1/2n)*(2+3*Y[i]+Y[i]**2)
        Y.append(A)
    return T,Y
```

2. (a) Soit $x \in I$ on a

$$\begin{aligned} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} &= \frac{x+2-(x+1)}{(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{1}{x^2+3x+2} \\ &= f(x). \end{aligned}$$

   On a bien $\forall x \in I, f(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{2+x}$.

   (b) Soit $x \in I$. En intégrant f sur $[0, x]$, on obtient :

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{1}{1+t}dt - \int_0^x \frac{1}{2+t}dt.$$

   D'où

$$\int_0^x f(t)dt = \ln(1+x) - \ln(2+x) + \ln(2).$$

   Donc une primitive de f est donnée par la fonction $\boxed{x \mapsto \ln(1+x) - \ln(2+x) + \ln(2).}$
3. (a) Soit $s \in I$. On a :

$$y'(s) = 2 + 3y(s) + y^(s).$$

   Or le membre de droite n'est pas nul. Donc

$$\frac{y'(s)}{2 + 3y(s) + y^(s)} = 1.$$

D'après la question 2.a, on a donc

$$\frac{y'(s)}{y(s)+1} - \frac{y'(s)}{y(s)+2} = 1.$$

On a bien

$$\boxed{\forall s \in I, \frac{y'(s)}{y(s)+1} - \frac{y'(s)}{y(s)+2} = 1.}$$

(b) Soit $t \in I$. Intégrons l'expression de la question 3.a entre 0 et t. On a alors :

$$[\ln(y(s)+1)]_{s=0}^{s=t} - [\ln(y(s))+2]_{s=0}^{s=t} = t.$$

D'où

$$\boxed{\ln(y(t)+1) - \ln(y(t)+2) + \ln(2) = t.}$$

(c) Soit $t \in I$. On a

$$\ln(y(t)+1) - \ln(y(t)+2) + \ln(2) = t$$

Donc

$$\frac{y(t)+1}{y(t)+2} = \frac{e^t}{2}$$

D'où

$$y(t)+1 = (y(t)+2)\frac{e^t}{2}$$

On a donc $y(t)(1-\frac{e^t}{2}) = e^t - 1$. D'où

$$\boxed{y(t) = \frac{e^t-1}{1-\frac{e^t}{2}} = \frac{2(e^t-1)}{2-e^t}}.$$

(d) Pour tout $t \in I$, on pose $g(t) = \frac{2(e^t-1)}{2-e^t}$. g étant la composée d'une fraction rationnelle avec la fonction exponentielle et le dénominateur de g ne s'annulant pas sur I, on en déduit que g est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, g'(t) = \frac{2e^t(2-e^t) - 2(e^t-1)(-e^t)}{(2-e^t)^2}$$

Donc :

$$\forall t \in I, g'(t) = \frac{2e^t}{(2-e^t)^2}$$

et :

$$\forall t \in I, 2+3g(t)+g(t)^2 = \frac{2(2-e^t)^2 + 6(e^t-1)(2-e^t) + 4(e^t-1)^2}{(2-e^t)^2}$$

D'où

$$\forall t \in I, 2+3g(t)+g(t)^2 = \frac{(2-e^t)^2 + 2(e^t-1)(2-e^t) + (2-e^t)^2 + 4(e^t-1)(2-e^t) + 4(e^t-1)^2}{(2-e^t)^2}$$

À l'aide d'une identité remarquable, on trouve :

$$\forall t \in I, 2+3g(t)+g(t)^2 = \frac{(2-e^t)^2 + 2(e^t-1)(2-e^t) + (2(e^t-1)+(2-e^t))^2}{(2-e^t)^2}$$

D'où

$$\forall t \in I, 2+3g(t)+g(t)^2 = \frac{4-4e^t+e^{2t}-4-2e^{2t}+6e^t+(e^t)^2}{(2-e^t)^2}$$

il en résulte que

$$\forall t \in I, 2+3g(t)+g(t)^2 = \frac{2e^t}{(2-e^t)^2} = g'(t)$$

La fonction g est bien solution de (E).