DS 1 mathématiques

BCPST 1B 2018-2019

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose

$$P_n = 1 + 4 + \cdots + (3n-2).$$

1. Calculer P_1, P_2, P_3, P_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$.
3. Pour tout réel positif x, on dit que x est un nombre pentagonal s'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $x = P_n$.
   Soit x un réel positif. Montrer que x est un nombre pentagonal si et seulement si l'équation d'inconnue $\alpha \in \mathbb{R}$
   $$3\alpha^2 - \alpha - 2x = 0 \tag{E}$$
   possède une solution entière et positive. Attention, il n'est pas dit que x est solution de cette équation.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^{+\star}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue réelle α : $3\alpha^2 - \alpha - 2x = 0$.
5. Soit x un réel positif. Montrer x est un nombre pentagonal si et seulement si $\frac{1+\sqrt{24x+1}}{6}$ est un entier strictement positif.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+3x+2} \geq 0$ 2. $\frac{x^2-4x+5}{x^2+3x+1} \geq -1$ 3. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ 4. $|6x-1| = x^2+2$.

Exercice 3. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On dit que A est un ensemble **ouvert** s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que tout entier $n \geq p$ est un élément de A.

1. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Écrire avec une expression logique que A est un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$.
2. Soient A, B deux ensembles ouverts de $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $A \cup B$ est un ensemble ouvert.
   (b) Montrer que $A \cap B$ est un ensemble ouvert.
3. L'ensemble $P = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$ est-il ouvert ? Le justifier.
4. Soit A un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$. On définit le "départ" de A par le plus petit entier p tel que tout entier $n \geq p$ est un élément de A. On veut montrer que le départ de A existe et est bien unique. Pour les questions a,b,c, on fixe A un ensemble ouvert.
   (a) Montrer que si un départ de A existe alors il est unique.
   (b) On pose $N_A = \{p \in A | \forall n \geq p, n \in A\}$. Justifier que N_A est non vide.
   (c) En déduire que N_A admet un plus petit élément m. Montrer que m est le départ de A.
5. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Montrer que A est un ensemble ouvert si et seulement si le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$ est fini.
6. Soit A un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$. Montrer que si un entier p est le départ de A alors $p-1$ n'est pas un élément de A.
7. Soient A, B deux ensembles ouverts de $\mathbb{N}$. On note respectivement p_1 et p_2 le départ de A et de B.
   (a) Montrer que le départ de $A \cap B$ est égal à $\max(p_1, p_2)$ (plus grand élément entre p_1 et p_2) .
   (b) Montrer que le départ de $A \cup B$ est inférieur à $\min(p_1, p_2)$ (plus petit élément entre p_1 et p_2).
   (c) Expliciter un exemple où le départ de $A \cup B$ est strictement plus petit que $\min(p_1, p_2)$.
8. Déterminer tous les ensembles ouverts de $\mathbb{N}$ ayant comme départ 3. On donnera la liste exhaustive sans justification.