DS 1 mathématiques

BCPST 1B 2018-2019

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose

$$P_n = 1 + 4 + \cdots + (3n - 2).$$

1. Calculer P_1, P_2, P_3, P_4.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$.
3. Pour tout réel positif x, on dit que x est un nombre pentagonal s'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $x = P_n$.
   Soit x un réel positif. Montrer que x est un nombre pentagonal si et seulement si l'équation d'inconnue $\alpha \in \mathbb{R}$
   $$3\alpha^2 - \alpha - 2x = 0 \tag{E}$$
   possède une solution entière et positive. Attention, il n'est pas dit que x est solution de cette équation.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^{+\star}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue réelle α : $3\alpha^2 - \alpha - 2x = 0$.
5. Soit x un réel positif. Montrer x est un nombre pentagonal si et seulement si $\frac{1+\sqrt{24x+1}}{6}$ est un entier strictement positif.

Correction

1. On a $\boxed{P_1 = 1, P_2 = 5, P_3 = 12, P_4 = 22.}$
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $H(n)$: $P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$. Démontrons H par récurrence.
   - Initialisation : pour $n = 1$, $\frac{1(3\times 1-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1 = P_1$ La proposition $H(1)$ est bien vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $H(n)$ est vraie. Par hypothèse :
     $$P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$
     En ajoutant $3(n+1) - 2$ à cette égalité, on obtient
     $$P_n + 3(n+1) - 2 = \frac{n(3n-1)}{2} + 3(n+1) - 2$$
     Or $P_n + 3(n+1) - 2 = P_{n+1}$. De plus,
     $$\begin{array}{rcl} \frac{n(3n-1)}{2} + 3(n+1) - 2 & = & \frac{n(3n-1)+6(n+1)-4}{2} \\ & = & \frac{3n^2-n+6n+6-4}{2} \\ & = & \frac{3n^2+5n+2}{2} \end{array}$$
     Mais $(n+1)(3(n+1)-1) = (n+1)(3n+3-1) = (n+1)(3n+2) = 3n^2+3n+2n+2 = 3n^2+5n+2$. D'où :
     $$\frac{3n^2+5n+2}{2} = \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2}.$$
     On a bien $P_{n+1} = \frac{(n+1)(3(n+1)-1)}{2}$. Autrement dit, $H(n+1)$ est vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que : $\boxed{\forall n \geq 1, P_n = \dfrac{n(3n-1)}{2}}$.

3. Montrons la proposition demandée par équivalence. Soit x un réel positif.
   Supposons que x est un nombre pentagonal. Il existe donc $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $x = \frac{n(3n-1)}{2}$. On a :

$$\begin{array}{rrcl} & x & = & \frac{n(3n-1)}{2} \\ \Leftrightarrow & 2x & = & n(3n-1) \\ \Leftrightarrow & 2x & = & 3n^2 - n \\ \Leftrightarrow & 0 & = & 3n^2 - n - 2x \end{array}$$

   L'entier strictement positif n est donc solution de l'équation (E) : $3\alpha^2 - \alpha - 2x = 0$.
   Réciproquement, supposons qu'il existe un entier $n \geq 1$ solution de l'équation (E) :

$$3n^2 - n - 2x = 0.$$

   Donc : $2x = 3n^2 - n$. D'où $x = \frac{3n^2-n}{2}$. Par conséquent, $\underline{x = \frac{n(3n-1)}{2}}$.
   Le réel x est bien un nombre pentagonal.
   Conclusion : par double implication, on en déduit que x est un nombre pentagonal si et seulement si l'équation (E) admet une solution entière positive.

4. On veut résoudre l'équation $3\alpha^2 - \alpha - 2x = 0$, où α est l'inconnue et x est un réel positif donné. On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 1 + 24x$. x étant positif, Δ est donc strictement positif. Il en résulte que les solutions de cette équation sont exactement

$$\begin{array}{rclrcl} x_1 & = & \frac{1+\sqrt{1+24x}}{2\cdot 3}, & x_2 & = & \frac{1-\sqrt{1+24x}}{2\cdot 3} \\ & = & \frac{1+\sqrt{1+24x}}{6}, & & = & \frac{1-\sqrt{1+24x}}{6} \end{array}$$

   Donc $\boxed{S = \left\{ \dfrac{1+\sqrt{1+24x}}{6}, \dfrac{1-\sqrt{1+24x}}{6} \right\}}$.

5. Soit x un réel positif. D'après la question 3, x est un nombre pentagonal si et seulement si l'équation (E) admet une solution entière strictement positif. Or, d'après la question 4, les solutions de cette équation sont $\frac{1+\sqrt{1+24x}}{6}$ et $\frac{1-\sqrt{1+24x}}{6}$. Autrement dit, x est un nombre pentagonal si et seulement si $\frac{1+\sqrt{1+24x}}{6}$ ou $\frac{1-\sqrt{1+24x}}{6}$ sont des entiers strictement positifs. Or, $x > 0$. Donc $1 + 24x > 1 > 0$. Par stricte croissance de la fonction racine carrée, on en déduit que $\sqrt{1+24x} > 1$. Donc $\frac{1-\sqrt{1+24x}}{6} < 0$. Ainsi l'unique solution positif de (E) est $\frac{1+\sqrt{1+24x}}{6}$.
   Il en résulte que x est un nombre pentagonal si et seulement si $\frac{1+\sqrt{1+24x}}{6}$ est un entier strictement positif.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+3x+2} \geq 0$ 2. $\frac{x^2-4x+5}{x^2+3x+1} \geq -1$ 3. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ 4. $|6x-1| = x^2 + 2$.

Correction

1. On résout l'inéquation par équivalence. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+3x+2} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{x^2+3x+2}$$

   Or, la proposition "$x^2 + 1 \geq 0$" est vérifiée car x est réel. De plus, $(x+1)(x+2) = x^2 + 2x + x + 2 = x^2 + 3x + 2$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcl} x^2 + 3x + 2 \geq 0 & \Leftrightarrow & (x+1)(x+2) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & x \in]-\infty, -2] \cup [-1, +\infty[\end{array}$$

   Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{x^2+3x+2} & \Leftrightarrow & x^2 + 1 \geq x^2 + 3x + 2 \text{ et } x \in]-\infty, -2] \cup [-1, +\infty[\\ & \Leftrightarrow & 0 \geq 3x + 1 \text{ et } x \in]-\infty, -2] \cup [-1, +\infty[\\ & \Leftrightarrow & \frac{-1}{3} \geq x \text{ et } x \in]-\infty, -2] \cup [-1, +\infty[\\ & \Leftrightarrow & \boxed{x \in]-\infty, -2] \cup \left[-1, \dfrac{-1}{3}\right]} \end{array}$$

2. On veut résoudre l'inéquation d'inconnue réelle x :

$$\frac{x^2-4x+5}{x^2+3x+1} \geq -1$$

Cette inéquation est définie si et seulement si $x^2+3x+1 \neq 0$. Résolvons dans un premier temps l'équation $x^2+3x+1=0$. On reconnaît une équation du second degré de discriminant $9-4=5>0$. Les solutions sont donc $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$.
On a :

$$\begin{aligned} \tfrac{x^2-4x+5}{x^2+3x+1} \geq -1 \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{x^2-4x+5}{x^2+3x+1}+1 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{x^2-4x+5}{x^2+3x+1}+\tfrac{x^2+3x+1}{x^2+3x+1} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{2x^2-x+6}{x^2+3x+1} \geq 0 \end{aligned}$$

Étudions les signes du numérateur et du dénominateur. Le numérateur étant un trinôme du second degré recherchons ses racines. Il a pour discriminant $\Delta = 1-48=-47<0$. Ainsi, x étant réel, $2x^2-x+6>0$.
Le signe du quotient est donc du signe du dénominateur. Or, les solutions de l'équation du second degré $x^2+3x+1=0$ sont $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. On en déduit que le dénominateur est strictement positif si et seulement $x \in]-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}[\cup]\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$.
Conclusion : $\boxed{S = \left]-\infty, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[.}$

3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^4-3x^2-4=0$. Posons $X=x^2$. L'équation est alors équivalente à

$$X^2-3X-4=0 \text{ et } X \geq 0.$$

Cette dernière équation du second degré a pour solution réelle évidente -1. Il en résulte que l'autre solution est 4. X étant positif, on en déduit que l'unique solution de cette équation est 4. Ainsi, l'équation initiale est équivalente à $x^2=4$.
Les solutions de cette équation sont donc $\underline{2 \text{ et } -2}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On veut résoudre l'équation

$$|6x-1| = x^2+2$$

— Cas 1 : $x \geq \frac{1}{6}$. L'équation est alors équivalente à

$$6x-1 = x^2+2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-6x+3=0$$

Cette dernière équation est une équation du second degré de discriminant $\Delta = 36-12=24$. Les solutions réelles sont donc $\frac{6+\sqrt{24}}{2}, \frac{6-\sqrt{24}}{2}$. En simplifiant, les solutions réelles sont donc $3+\sqrt{6}, 3-\sqrt{6}$. Vérifions si ces valeurs sont supérieures à $\frac{1}{6}$.

$$\begin{aligned} 3+\sqrt{6} \geq \tfrac{1}{6} \quad &\Leftrightarrow \quad 3-\tfrac{1}{6}+\sqrt{6} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{17}{6}+\sqrt{6} \geq 0 \text{ VRAI} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} 3-\sqrt{6} \geq \tfrac{1}{6} \quad &\Leftrightarrow \quad 3-\tfrac{1}{6}-\sqrt{6} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{17}{6} \geq \sqrt{6} \\ &\Leftrightarrow \quad 17 \geq 6\sqrt{6} > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 17^2 \geq 36 \cdot 6 \qquad (\text{ la fonction carrée est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+) \\ &\Leftrightarrow \quad 289 \geq 216 \text{ VRAI} \end{aligned}$$

— Cas 2 : $x < \frac{1}{6}$. L'équation est alors équivalente à

$$-6x+1 = x^2+2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+6x+1=0$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 36-4=32$. Les solutions réelles sont donc $\frac{-6-\sqrt{32}}{2}, \frac{-6+\sqrt{32}}{2}$. Après simplification, on obtient comme solutions réelles $-3-\sqrt{8}, -3+\sqrt{8}$. Reste à vérifier si ces valeurs sont inférieurs à $\frac{1}{6}$.
Il est clair que $-3-\sqrt{8}<0$, donc $-3-\sqrt{8}<\frac{1}{6}$. Donc ce réel est solution de l'équation initiale.
On a

$$\begin{aligned} -3+\sqrt{8} \geq \tfrac{1}{6} \quad &\Leftrightarrow \sqrt{8} \geq 3+\tfrac{1}{6} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{8} \geq \tfrac{19}{6} \\ &\Leftrightarrow \quad 6\sqrt{8} \geq 19 > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 36 \times 8 \geq 361 \quad (\text{stricte croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}^+) 288 \geq 361 \\ &\Leftrightarrow \quad \text{FAUX} \end{aligned}$$

Donc $-3+\sqrt{8}$ est solution de l'équation.

Par disjonction de cas, on en déduit que l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\left\{3-\sqrt{6}, 3+\sqrt{6}, -3+\sqrt{8}, -3-\sqrt{8}\right\}}$$

Exercice 3. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On dit que A est un ensemble **ouvert** s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que tout entier $n \geq p$ est un élément de A.

1. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Écrire avec une expression logique que A est un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$.
2. Soient A, B deux ensembles ouverts de $\mathbb{N}$.
   (a) Montrer que $A \cup B$ est un ensemble ouvert.
   (b) Montrer que $A \cap B$ est un ensemble ouvert.
3. L'ensemble $P = \{2n, n \in \mathbb{N}\}$ est-il ouvert ? Le justifier.
4. Soit A un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$. On définit le "départ" de A par le plus petit entier p tel que tout entier $n \geq p$ est un élément de A. On veut montrer que le départ de A existe et est bien unique. Pour les questions a,b,c, on fixe A un ensemble ouvert.
   (a) Montrer que si un départ de A existe alors il est unique.
   (b) On pose $N_A = \{p \in A | \forall n \geq p, n \in A\}$. Justifier que N_A est non vide.
   (c) En déduire que N_A admet un plus petit élément m. Montrer que m est le départ de A.
5. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. Montrer que A est un ensemble ouvert si et seulement si le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$ est fini.
6. Soit A un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$. Montrer que si un entier p est le départ de A alors $p-1$ n'est pas un élément de A.
7. Soient A, B deux ensembles ouverts de $\mathbb{N}$. On note respectivement p_1 et p_2 le départ de A et de B.
   (a) Montrer que le départ de $A \cap B$ est égal à $\max(p_1, p_2)$ (plus grand élément entre p_1 et p_2) .
   (b) Montrer que le départ de $A \cup B$ est inférieur à $\min(p_1, p_2)$ (plus petit élément entre p_1 et p_2).
   (c) Expliciter un exemple où le départ de $A \cup B$ est strictement plus petit que $\min(p_1, p_2)$.
8. Déterminer tous les ensembles ouverts de $\mathbb{N}$ ayant comme départ 3. On donnera la liste exhaustive sans justification.

Correction

Soit A une partie de $\mathbb{N}$. On dit que A est un ensemble **ouvert** s'il existe un entier $p \in \mathbb{N}$ tel que tout entier $n \geq p$ est un élément de A.

1. Soit A une partie de $\mathbb{N}$. L'ensemble A est un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$ si $\boxed{\exists p \in \mathbb{N}, \forall n \geq p, n \in A}$
2. Soient A, B deux ensembles ouverts de $\mathbb{N}$.
   (a) Par définition de A, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que tout entier $n \geq p$ est un élément de A. Donc tout entier $n \geq p$ est un élément de $A \cup B$. Ainsi, $A \cup B$ est bien ouvert.
   (b) Par définition de A, il existe p_1 tel que tout entier $n \geq p_1$ est un élément de A.
   De même, par définition de B, il existe p_2 tel que tout entier $n \geq p_2$ est un élément de B.
   Notons $p = \max(p_1, p_2)$. Soit $n \geq p$. On a donc $n \geq p_1$ et $n \geq p_2$. Donc n est un élément de A et est un élément de B. Autrement dit, n est un élément de $A \cap B$.
   Par conséquent, $\underline{A \cap B \text{ est bien un ouvert}}$.
3. Montre qu'un ensemble A n'est pas ouvert revient à montrer que pour tout entier $p \in \mathbb{N}$ il existe $n \geq p$ et n n'est pas un élément de A. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a bien $2p+1 > p$. De plus, $2p+1$ étant impair, ce n'est pas un élément de P.
   L'ensemble P n'est donc pas ouvert.
4. Soit A un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$.
   (a) Soient p_1 et p_2 deux départs de A. Par définition de p_2, on sait que tout entier $n \geq p_2$ est un élément de A. Mais p_1 est le plus petit élément qui vérifie cette propriété. Donc $\underline{p_1 \leq p_2}$.
   De même, en échangeant les rôles de p_1 et de p_2 dans le raisonnement précédent, on en déduit que $\underline{p_1 \geq p_2}$.
   Conclusion : $p_1 = p_2$. Autrement dit, il y a unicité du départ de A sous réserve d'existence.
   (b) On pose $N_A = \{p \in A | \forall n \geq p, n \in A\}$. A étant un ouvert, il existe donc un $p \in \mathbb{N}$ tel que tout élément supérieur à p est un élément de A. En particulier, p est un élément de A et p vérifie "$\forall n \geq p, n \in A$. Donc p est un élément de N_A. Cet ensemble est donc non vide.

(c) L'ensemble N_A est donc une partie non vide de $\mathbb{N}$. Il admet un donc un plus petit élément que l'on note m. Montrons que m est le départ de A. Par définition, m vérifie comme propriété $\forall n \geq m, n \in A$. Supposons que m n'est pas le départ de A. Il existerait donc $p < m$ entier positif tel que $\forall n \geq p$, $n \in A$. Donc p serait un élément de N_A strictement plus petit que m. Ce qui est absurde, puisque m est le plus petit élément de N_A.

L'entier m est bien le départ de A.

5. Soit A une partie de $\mathbb{N}$.

— Supposons que A est un ouvert de $\mathbb{N}$. Il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que tout élément $n \geq p$ est un élément de A. Par conséquent, tout élément $x \in \mathbb{N}$ qui n'est pas un élément de A est inférieur strict à p. Donc $\overline{A} \subset \{0, 1, \cdots, p\}$. Par conséquent, $\overline{A}$ est bien fini.

— Réciproquement, supposons que $\overline{A}$ est fini. Notons p le maximum de $\overline{A}$. Ainsi, tout élément de $\overline{A}$ est plus petit que p. Soit $n \geq p+1$. n est donc strictement plus grand que p D'où n n'est pas un élément de $\overline{A}$. Autrement dit, n est un élément de A.

Ainsi, tout entier supérieur à $p+1$ est un élément de A.

L'ensemble A est bien un ouvert.

D'après le principe de double implication, on en déduit que A est un ouvert si et seulement si $\overline{A}$ dans $\mathbb{N}$ est fini.

6. Soit A un ensemble ouvert de $\mathbb{N}$. Notons p le départ de A. Montrons par l'absurde que $p-1$ n'est pas un élément de A. Supposons que $p-1$ est un élément de A. Alors $p-1$ est un entier positif et $p-1 < p$. De plus, pour tout entier $n \geq p$, on a $n \geq p-1$. Il en résulte que pour tout entier $n \geq p-1$, on a $n \in A$. Ainsi, p n'est pas le plus petit entier de $\mathbb{N}$ vérifiant $\forall n \geq p, n \in A$.

Ce qui est absurde, car p est le départ de A.

Conclusion : $\underline{p-1 \text{ n'est pas un élément de } A.}$

7. Soient A, B deux ensembles ouverts de $\mathbb{N}$. Notons respectivement p_1 et p_2 le départ de A et de B.

(a) Notons p le départ de $A \cap B$. Soit $n \geq \max(p_1, p_2)$. Donc $n \geq p_1$ et $n \geq p_2$. D'où n est un élément de A et n est un élément de B. Donc n est un élément de $A \cap B$. Il en résulte que $\max(p_1, p_2)$ est plus grand que le départ de $A \cap B$. Autrement dit, $\underline{\max(p_1, p_2) \geq p}$.

Montrons que $\max(p_1, p_2) - 1$ n'est pas un élément de $A \cap B$.

— Cas 1 : $\max(p_1, p_2) = p_1$. Dans ce cas, $\max(p_1, p_2) - 1 = p_1 - 1$. Ce n'est pas un élément de A d'après la question 6. Donc $\max(p_1, p_2) - 1 \notin A \cap B$.

— Cas 2 : $\max(p_1, p_2) = p_2$. Dans ce cas, $\max(p_1, p_2) - 1 = p_2 - 1$. Ce n'est pas un élément de B d'après la question 6. Donc $\max(p_1, p_2) - 1 \notin A \cap B$.

Par disjonction de cas, on en déduit que le départ de $A \cap B$ doit être strictement plus grand que $\max(p_1, p_2) - 1$. D'où $\underline{p \geq \max(p_1, p_2)}$.

Des deux inégalités précédentes, on en déduit que $\boxed{\max(p_1, p_2) = p}$.

(b) Notons q le départ de $A \cup B$. Montrons que $q \leq \min(p_1, p_2)$. Par définition de p_1 et de p_2, pour tout $n \geq p_1$ ou $n \geq p_2$, on a $n \in A \cup B$. Autrement dit, pour tout $n \geq \min(p_1, p_2)$, on a $n \in A \cup B$. Par définition du départ, il en résulte que $\underline{q \leq \min(p_1, p_2)}$.

(c) Posons $A = \mathbb{N} \backslash \{1\}$ et $B = \mathbb{N}^\star$. Le départ de A est donc 2 et le départ de B est 1. Or $A \cup B = \mathbb{N}$. Donc le départ de $A \cup B$ est 0 qui est bien strictement plus petit que $\min(1, 2) = 1$.

8. Voici tous les ensembles ouvert ayant 3 comme départ :

(a) $A_1 = \{0, 1\} \cup \{n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$, (b) $A_2 = \{0\} \cup \{n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$,

(c) $A_3 = \{1\} \cup \{n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$, (d) $A_4 = \{n \in \mathbb{N}, n \geq 3\}$.