DS 2 mathématiques

BCPST 1B 2018-2019

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $\sin(2x) + \sin(x) \geq 0$. 2. $\cos(x) > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 3. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$.

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et θ un réel. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cos(k\theta)$.

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = (2k+1)\pi$. Simplifier S_n.
2. Dans cette question, on suppose que θ n'est pas un multiple entier impair de π. Simplifier S_n.

Exercice 3. Soit n un entier plus grand que 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = \binom{n+k+1}{k}$.

1. Pour tout $k \geq 1$, exprimer a_{k-1} à l'aide d'un coefficient binomial.
2. En calculant $\sum_{k=1}^{n}(\binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k}{k-1})$ de deux manières différentes, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n+k}{k} = \binom{2n+1}{n} - 1.$$

3. En déduire que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} = \binom{2n+1}{n}$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier

1. $S_n = \sum_{0 \leq i,j \leq n} \sin(i-j)$ 2. $T_n = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=j}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{j} 2^j$.

Exercice 5. On définit la fonction f par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in]-1,1[$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$ et déterminer sa réciproque.

Problème

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit la n-ieme factorielle descendante de x notée $(x)_n$ par :

$$\prod_{i=0}^{n-1} (x-i)$$

et le coefficient binomial généralisé n parmi x noté $\left\langle \begin{matrix} x \\ n \end{matrix} \right\rangle$ par

$$\frac{\left(\prod_{i=0}^{n-1}(x-i)\right)}{n!}$$

Par convention, $(x)_0 = \left\langle \begin{matrix} x \\ 0 \end{matrix} \right\rangle = 1$.

L'objectif de ce problème est d'établir des identités relatives à cette factorielle et aux coefficients binomiaux généralisés. Attention à ne pas confondre ces nombres avec les factorielles ou les coefficients binomiaux usuels.

1. Calculer $(3)_2$, $(3)_4$, $(-4)_2$, $(\frac{1}{2})_3$.
2. Calculer $\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\rangle$, $\left\langle \begin{array}{c} -4 \\ 2 \end{array} \right\rangle$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer des entiers a, b, c tels que $(\frac{-1}{2})_n = \frac{a!}{b!c^n}$
4. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $(x)_n = x(x-1)_{n-1}$.
5. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\binom{n}{k} = \left\langle \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\rangle$.
6. Soient $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left\langle \begin{array}{c} x \\ n \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{c} x \\ n+1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} x+1 \\ n+1 \end{array} \right\rangle$.
7. Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(x)_n (x-k) = (x)_{n+1} + (n-k)(x)_n$.
8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\frac{x-N+1}{N} \left\langle \begin{array}{c} x \\ N-1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} x \\ N \end{array} \right\rangle$. En déduire une propriété similaire sur les coefficients binomiaux usuels.
9. On veut démontrer :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, (x)_m (x)_n = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} k! \, (x)_{m+n-k} \, .$$
Soient $x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :
$$P(n) : (x)_m (x)_n = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} k! \, (x)_{m+n-k} \, .$$
   (a) Montrer que $P(0)$ est vraie.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Montrer que
   $$(x)_m (x)_{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} k! \, (x)_{m+n+1-k} \right) + \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} k! (m-k) \, (x)_{m+n-k} \right).$$
   (c) Montrer que
   $$\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} k!(m-k) \, (x)_{m+n-k} \right) = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} \binom{n}{k-1} (k-1)!(m-k+1) \, (x)_{m+n+1-k} \, .$$
   (d) En déduire que
   $$\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} (m-k) k! \, (x)_{m+n-k} \right) = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k-1} (k)! \, (x)_{m+n+1-k} \, .$$
   (e) En déduire que $P(n+1)$ est vraie.
   (f) Conclure.