DS 2 mathématiques

BCPST 1B 2018-2019

— Durée : 3 heures.

— Documents et calculatrice non autorisés.

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $\sin(2x) + \sin(x) \geq 0$. 2. $\cos(x) > \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 3. $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2}$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{array}{rcl} \sin(2x) + \sin(x) \geq 0 & \Leftrightarrow & 2\sin(x)\cos(x) + \sin(x) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & \sin(x)(2\cos(x) + 1) \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & (\sin(x) \geq 0 \text{ et } \cos(x) \geq -\frac{1}{2}) \\ & & \text{ ou } (\sin(x) \leq 0 \text{ et } \cos(x) \leq -\frac{1}{2}) \end{array}$$
Or
$$(\sin(x) \geq 0 \text{ et } \cos(x) \geq -\frac{1}{2}) \Leftrightarrow x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi]$$
et
$$(\sin(x) \leq 0 \text{ et } \cos(x) \leq -\frac{1}{2}) \Leftrightarrow x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}[-\pi + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi]$$
On en déduit que
$$\boxed{S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}[2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi] \cup [-\pi + 2k\pi, -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi]}$$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que $\sqrt{3} > 1$, donc $\frac{1+\sqrt{3}}{2} > 1$. Mais $\cos(x) \leq 1$. Il en résulte que cette équation n'a pas de solution réelle. D'où : $\boxed{S = \emptyset}$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{array}{rcl} \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2} & \Leftrightarrow & 2(\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{3}\sin(x)}{2}) = \sqrt{2} \\ & \Leftrightarrow & \cos(\frac{\pi}{3})\cos(x) - \sin(\frac{\pi}{3})\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ & \Leftrightarrow & \cos(x + \frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}$$
Par conséquent,
$$\begin{array}{rcl} \cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) = \sqrt{2} & \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, (x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x + \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \\ & \Leftrightarrow & \exists k \in \mathbb{Z}, x = \frac{-\pi}{12} + 2k\pi \text{ ou } x = -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi \end{array}$$
Donc
$$\boxed{S = \cup_{k\in\mathbb{Z}}\{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi, -\frac{7\pi}{12} + 2k\pi\}}.$$

Exercice 2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et θ un réel. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \cos(k\theta)$.

1. Dans cette question, on suppose qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = (2k+1)\pi$. Simplifier S_n.
2. Dans cette question, on suppose que θ n'est pas un multiple entier impair de π. Simplifier S_n.

Correction

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe $r \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = (2r+1)\pi$. On a

$$\begin{array}{rcll} S_n & = & \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \cos(k\theta) & \\ & = & \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \Re(e^{ik(2r+1)\pi}) & \\ & = & \Re\left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k e^{ik(2r+1)\pi}\right) & (-1)^k \in \mathbb{R} \\ & = & \Re\left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(-1)^k\right) & \\ & = & \Re\left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k(-1)^k\right) & \\ & = & \Re\left(\sum_{k=0}^{2n} 1\right) & \\ & = & \boxed{2n+2} & \end{array}$$

2. Soit θ un réel qui n'est pas un multiple impair de π.

$$\begin{array}{rcll} S_n & = & \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \cos(k\theta) & \\ & = & \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k \Re(e^{ik\theta}) & \\ & = & \Re\left(\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k e^{ik\theta}\right) & (-1)^k \in \mathbb{R} \\ & = & \Re\left(\sum_{k=0}^{2n}(-e^{i\theta})^k\right) & \end{array}$$

Mais θ n'est pas un multiple impair de π, donc $-e^{i\theta} \neq 1$. D'où,

$$\begin{array}{rcll} S_n & = & \Re\left(\frac{1-(-e^{i\theta})^{2n+1}}{1+e^{i\theta}}\right) & \\ & = & \Re\left(\frac{1+e^{i(2n+1)\theta}}{1+e^{i\theta}}\right) & \\ & = & \Re\left(\frac{e^{i\frac{2n+1}{2}\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} \frac{e^{\frac{-(2n+1)i\theta}{2}}+e^{\frac{i(2n+1)\theta}{2}}}{e^{\frac{-i\theta}{2}}+e^{\frac{i\theta}{2}}}\right) & \\ & = & \Re\left(e^{in\theta}\frac{2\cos((\frac{2n+1}{2})\theta)}{2\cos(\frac{\theta}{2})}\right) & \\ & = & \frac{2\cos((\frac{2n+1}{2})\theta)}{2\cos(\frac{\theta}{2})}\Re(e^{in\theta}) & \left(\frac{\cos((\frac{2n+1}{2})\theta)}{\cos(\frac{\theta}{2})} \in \mathbb{R}\right) \\ & = & \boxed{\frac{\cos((\frac{2n+1}{2})\theta)}{\cos(\frac{\theta}{2})}\cos(n\theta)} & \end{array}$$

Exercice 3. Soit n un entier plus grand que 1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $a_k = \binom{n+k+1}{k}$.

1. Pour tout $k \geq 1$, exprimer a_{k-1} à l'aide d'un coefficient binomial.
2. En calculant $\sum_{k=1}^{n}(\binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k}{k-1})$ de deux manières différentes, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{n+k}{k} = \binom{2n+1}{n} - 1.$$

3. En déduire que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k} = \binom{2n+1}{n}$.

Correction

1. Soit $k \geq 1$. On a $a_{k-1} = \binom{n+k-1+1}{k-1} = \boxed{\binom{n+k}{k-1}}$.
2. Soit $n \geq 1$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n}(\binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k}{k-1}) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} a_k - a_{k-1}.$$

On reconnaît une somme télescopique. D'où

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^{n}(\binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k}{k-1}) & = & a_n - a_0 \\ & = & \underline{\binom{2n+1}{n} - 1} \end{array}$$

De plus, d'après le triangle de Pascal, pour tout $k \in \{1, \cdots, n\}$, on a $\binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k}{k-1} = \binom{n+k}{k}$. D'où

$$\sum_{k=1}^{n}(\binom{n+k+1}{k} - \binom{n+k}{k-1}) = \underline{\sum_{k=1}^{n}\binom{n+k}{k}}.$$

Il résulte des deux égalités précédentes que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n}\binom{n+k}{k}=\binom{2n+1}{n}-1.}$$

3. De la question 2, on en déduit que

$$1+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+k}{k}=\binom{2n+1}{n}.$$

Mais $\binom{n}{0}=1$, donc

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}\binom{n+k}{k}=\binom{2n+1}{n}}$$

Exercice 4. Soit $n\in\mathbb{N}$. Simplifier

1. $S_n=\sum_{0\le i,j\le n}\sin(i-j)$ 2. $T_n=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{j}2^j$.

Correction

1. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$\begin{array}{rcl} S_n & = & \sum_{0\le i,j\le n}\sin(i-j) \\ & = & \sum_{0\le i<j\le n}\sin(i-j)+\sum_{0\le i=j\le n}\sin(i-j)+\sum_{0\le j<i\le n}\sin(i-j) \end{array}$$

La fonction sin étant impaire, on en déduit que

$$S_n=\sum_{0\le i<j\le n}\sin(i-j)+0-\sum_{0\le j<i\le n}\sin(j-i)$$

Il en résulte que

$$\boxed{S_n=0.}$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$\begin{array}{rcl} T_n & = & \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=j}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{j}2^j \\ & = & \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\binom{n}{k}\binom{k}{j}2^j \\ & = & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sum_{k=0}^{k}\binom{k}{j}2^j \end{array}$$

D'après la formule du binôme, on en déduit que

$$T_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2+1)^k$$

En appliquant de nouveau la formule du binôme, on trouve

$$T_n=(3+1)^n=\boxed{4^n}.$$

Exercice 5. On définit la fonction f par : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

1. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)\in]-1,1[$.
2. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$ et déterminer sa réciproque.

Correction

1. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcll} -1<\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}<1 & \Leftrightarrow & -e^x-e^{-x}<e^x-e^{-x}<e^x+e^{-x} & (e^x+e^{-x})>0 \\ & \Leftrightarrow & -2e^x<0<2e^{-x} & (e^{-x}>0) \\ & \Leftrightarrow & \text{VRAI} & (e^{-x}>0) \end{array}$$

Par équivalence, on en déduit que $f(x)\in]-1,1[$.

2. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]-1,1[$.

$$\begin{array}{rcll} f(x) = y & \Leftrightarrow & \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = y & \\ & \Leftrightarrow & e^x - e^{-x} = y(e^x + e^{-x}) & (e^x > 0) \\ & \Leftrightarrow & e^{2x} - 1 = ye^{2x} + y & \\ & \Leftrightarrow & (1-y)e^{2x} = 1 + y & (y \neq 1) \\ & \Leftrightarrow & e^{2x} = \frac{1+y}{1-y} & \\ & \Leftrightarrow & 2x = \ln(\frac{1+y}{1-y}) & \\ & \Leftrightarrow & x = \frac{1}{2}\ln(\frac{1+y}{1-y}) & \end{array}$$

Il en résulte que f réalise bien une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$ et la réciproque est donnée par

$$\boxed{\begin{array}{llll} g: &]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{2}\ln(\frac{1+y}{1-y}) \end{array}}$$

Problème

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit la n-ieme factorielle descendante de x notée $(x)_n$ par :

$$\prod_{i=0}^{n-1}(x-i)$$

et le coefficient binomial généralisé n parmi x noté $\left\langle \begin{array}{c} x \\ n \end{array} \right\rangle$ par

$$\frac{\left(\prod_{i=0}^{n-1}(x-i)\right)}{n!}$$

Par convention, $(x)_0 = \left\langle \begin{array}{c} x \\ 0 \end{array} \right\rangle = 1$.

L'objectif de ce problème est d'établir des identités relatives à cette factorielle et aux coefficients binomiaux généralisés. Attention à ne pas confondre ces nombres avec les factorielles ou les coefficients binomiaux usuels.

1. Calculer $(3)_2$, $(3)_4$, $(-4)_2$, $(\frac{1}{2})_3$.
2. Calculer $\left\langle \begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right\rangle$, $\left\langle \begin{array}{c} -4 \\ 2 \end{array} \right\rangle$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer des entiers a, b, c tels que $(\frac{-1}{2})_n = \frac{a!}{b!c^n}$
4. Soient $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x \in \mathbb{R}$. Justifier que $(x)_n = x(x-1)_{n-1}$.
5. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\binom{n}{k} = \left\langle \begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right\rangle$.
6. Soient $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\left\langle \begin{array}{c} x \\ n \end{array} \right\rangle + \left\langle \begin{array}{c} x \\ n+1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} x+1 \\ n+1 \end{array} \right\rangle$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $(x)_n(x-k) = (x)_{n+1} + (n-k)(x)_n$.
8. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $N \in \mathbb{N}^\star$. Montrer que $\frac{x-N+1}{N}\left\langle \begin{array}{c} x \\ N-1 \end{array} \right\rangle = \left\langle \begin{array}{c} x \\ N \end{array} \right\rangle$. En déduire une propriété similaire sur les coefficients binomiaux usuels.
9. On veut démontrer :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, (x)_m (x)_n = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{k} k! \, (x)_{m+n-k}.$$

Soient $x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P(n) : (x)_m (x)_n = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{n}{k} k! \, (x)_{m+n-k}.$$

(a) Montrer que $P(0)$ est vraie.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Montrer que

$$(x)_m \, (x)_{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} k! \, (x)_{m+n+1-k} \right) + \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} k!(m-k) \, (x)_{m+n-k} \right).$$

(c) Montrer que

$$\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} k!(m-k) \, (x)_{m+n-k} \right) = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} \binom{n}{k-1} (k-1)!(m-k+1) \, (x)_{m+n+1-k} \, .$$

(d) En déduire que

$$\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} (m-k)k! \, (x)_{m+n-k} \right) = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k-1} (k)! \, (x)_{m+n+1-k} \, .$$

(e) En déduire que $P(n+1)$ est vraie.

(f) Conclure.

Problème

Correction

1. On a

$$(3)_2 = 6, (3)_4 = 0, (-4)_2 = 20, (\frac{1}{2})_3 = \frac{3}{8}.$$

2. On a

$$\left\langle \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle = 0, \left\langle \begin{matrix} -4 \\ 2 \end{matrix} \right\rangle = 10.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
(\tfrac{-1}{2})_n &= \textstyle\prod_{i=0}^{n-1} (\frac{-1}{2} - i) \\
&= \textstyle\prod_{i=0}^{n-1} (\frac{-1-2i}{2} \\
&= \textstyle(-\frac{1}{2})^n \prod_{i=0}^{n-1} (2i+1) \\
&= \textstyle(-\frac{1}{2})^n \frac{(2n)!}{\prod k=1^n (2k)} \\
&= \textstyle(-\frac{1}{4})^n \frac{(2n)!}{\prod k=1^n k} \\
&= \textstyle(-\frac{1}{4})^n \frac{(2n)!}{n!} \\
&= \textstyle\frac{(2n)!}{n!(-4)^n}
\end{aligned}$$

En posant $a = 2n, b = n, c = -4$, on a bien $\boxed{(\frac{-1}{2})_n = \frac{a!}{b!c^n}}$.

4. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
(x)_n &= \textstyle\prod_{k=0}^{n-1} (x-k) \\
&= x \textstyle\prod_{k=1}^{n-1} (x-k) \\
&= x \textstyle\prod_{k=0}^{n-2} (x-1-k) \\
&= \boxed{x \, (x-1)_{n-1}}
\end{aligned}$$

5. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$.
   — Cas 1 : $k > n$. On a alors $\binom{n}{k} = 0$ et

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = \frac{\prod_{i=0}^{k-1} (n-i)}{k!}$$

Or $k > n$, donc l'un des i est égal à n et donc le produit est nul. On a bien

$$\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = 0.$$

D'où $\left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle = \binom{n}{k}$.

— Cas 2 : $k \leq n$.

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle &= \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(n-i)}{k!} \\ &= \frac{\prod_{i=0}^{n-1}(n-i)}{k!\prod_{i=k}^{n-1}(n-i)} \end{aligned}$$

En posant dans les produits $j = n - i$, on obtient

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle &= \frac{\prod_{j=1}^{n} j}{k!\prod_{j=1}^{n-k} j} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \boxed{\binom{n}{k}}. \end{aligned}$$

Montrer que $\binom{n}{k} = \left\langle \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rangle$.

6. Soient $x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{matrix} x \\ n \end{matrix} \right\rangle + \left\langle \begin{matrix} x \\ n+1 \end{matrix} \right\rangle &= \frac{(x)_n}{n!} + \frac{(x)_{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \frac{(x)_n}{(n+1)!}\left(n+1+(x-n)\right) \\ &= \frac{(x)_n(x+1)}{(n+1)!} \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n}(x+1-k}{(n+1)!} \\ &= \boxed{\left\langle \begin{matrix} x+1 \\ n+1 \end{matrix} \right\rangle} \end{aligned}$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} (x)_n (x-k) &= (x)_n (x-n+n-k) \\ &= (x)_n (x-n) + (n-k)(x)_n \\ &= \boxed{(x)_{n+1} + (n-k)(x)_n} \end{aligned}$$

8. Soient $x \in \mathbb{R}, N \in \mathbb{N}^\star$.

$$\begin{aligned} \frac{x-N+1}{N} \left\langle \begin{matrix} x \\ N-1 \end{matrix} \right\rangle &= \frac{x-N+1}{N}\frac{(x)_{N-1}}{(N-1)!} \\ &= \frac{(x)_N}{N!} \\ &= \boxed{\left\langle \begin{matrix} x \\ N \end{matrix} \right\rangle} \end{aligned}$$

De même, on obtient pour les coefficients binomiaux :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^\star, \boxed{\frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1} = \binom{n}{k}}.$$

9. (a) Pour $n = 0$, on a $(x)_m (x)_0 = (x)_m$ et $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{0}{k}k!(x)_{m-k} = \binom{m}{0}\binom{0}{0}0!(x)_m = (x)_m$, les autres termes de la somme étant nuls ($\forall k > 0, \binom{0}{k} = 0$) . D'où

$$(x)_m (x)_0 = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k}k!\,(x)_{n+m-k}\,.$$

Donc $P(0)$ est vraie.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie.

$$(x)_m (x)_{n+1} = (x)_m (x)_n (x-n)$$

D'après $P(n)$, on en déduit que

$$(x)_m (x)_{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} k! \, (x)_{n+m-k} \right) (x-n)$$

D'où

$$(x)_m (x)_{n+1} = \sum_{k=0}^{m} \left(\binom{m}{k} \binom{n}{k} k! \, (x)_{n+m-k} (x-n) \right)$$

Or d'après la question 7, pour tout $k \in \{0, \cdots, m\}$, $(x)_{n+m-k} (x-n) = (x)_{m+n+1-k} + (m-k) (x)_{m+n-k}$. D'où

$$(x)_m (x)_{n+1} = \sum_{k=0}^{m} \left(\binom{m}{k} \binom{n}{k} k! ((x)_{m+n+1-k} + (m-k) (x)_{m+n-k}) \right)$$

Donc

$$(x)_m (x)_{n+1} = \sum_{k=0}^{m} \left(\binom{m}{k} \binom{n}{k} k! \, (x)_{m+n+1-k} + \binom{m}{k} \binom{n}{k} k! (m-k) (x)_{m+n-k} \right)$$

Par conséquent,

$$\boxed{(x)_m (x)_{n+1} = \sum_{k=0}^{m} \left(\binom{m}{k} \binom{n}{k} k! \, (x)_{m+n+1-k} \right) + \sum_{k=0}^{m} \left(\binom{m}{k} \binom{n}{k} k! (m-k) (x)_{m+n-k} \right).}$$

(c) Posons $l = k+1$ dans la deuxième somme. On obtient alors $1 \le l \le m+1$ et :

$$\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} k! (m-k) (x)_{m+n-k} \right) = \sum_{l=1}^{m+1} \binom{m}{l-1} \binom{n}{l-1} (l-1)! (m-l+1) (x)_{m+n+1-l}.$$

En renommant l, on a bien

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} k! (m-k) (x)_{m+n-k} \right) = \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} \binom{n}{k-1} (k-1)! (m-k+1) (x)_{m+n+1-k}.}$$

(d) Constatons que pour $k = m+1$, $(m+1-k) = 0$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} \binom{n}{k-1} (k-1)! \, (x)_{m+n+1-k} = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} \binom{n}{k-1} (k-1)! \, (x)_{m+n+1-k}$$

Or d'après la question 8, $\binom{m}{k-1}(m-k) = k\binom{n}{k}$. D'où

$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} \binom{n}{k-1} (k-1)! (m-k) (x)_{m+n+1-k} & = & \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k-1} (k-1)! k \, (x)_{m+n+1-k} \\ & = & \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k-1} k! \, (x)_{m+n+1-k} \end{array}$$

D'où, à l'aide de la question 9.c :

$$\boxed{\left(\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k} k! (m-k) (x)_{m+n-k} \right) = \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} \binom{n}{k-1} k! \, (x)_{m+n+1-k}.}$$

(e) D'après 9.b :

$$(x)_m (x)_{n+1} = \sum_{k=0}^{m} \left(\binom{m}{k} \binom{n}{k} k! \, (x)_{m+n+1-k} \right) + \sum_{k=0}^{m} \left(\binom{m}{k} \binom{n}{k} k! (m-k) (x)_{m+n-k} \right)$$

mais d'après 9.d, on obtient en remplaçant la deuxième somme :

$$(x)_m\,(x)_{n+1} = \sum_{k=0}^{m}\left(\binom{m}{k}\binom{n}{k}k!\,(x)_{m+n+1-k}\right) + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\binom{n}{k-1}k!\,(x)_{m+n+1-k}$$

Donc , en séparant dans la première somme le terme en $k=0$, en regroupant les deux sommes et en factorisant à l'intérieur de la somme on obtient

$$(x)_m\,(x)_{n+1} = (x)_{m+n+1} + \sum_{k=1}^{m}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)k!\binom{m}{k}(x)_{m+n+1-k}\,.$$

Et d'après le triangle de Pascal, on obtient :

$$(x)_m\,(x)_{n+1} = (x)_{m+n+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{n+1}{k}k!\binom{m}{k}(x)_{m+n+1-k}\,.$$

En réintégrant le terme d'indice 0, on a donc :

$$(x)_m\,(x)_{n+1} = \sum_{k=0}^{m}\binom{n+1}{k}k!\binom{m}{k}(x)_{m+n+1-k}\,.$$

La proposition $P(n+1)$ est donc vraie.

$$(x)_m\,(x)_{n+1} = (x)_{m+n+1} + \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\binom{n+1}{k}k!\,(x)_{m+n+1-k}\,.$$

(f) La proposition P étant initialisée et héréditaire, il en résulte que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a

$$\boxed{(x)_m\,(x)_n = \sum_{k=0}^{m}\binom{n}{k}\binom{m}{k}k!\,(x)_{m+n-k}}$$