DS n^o 3 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Exercice

Lors d'une sortie scolaire, une classe de BCPST de 36 filles, 11 garçons et 3 accompagnateurs montent dans un autocar de 53 places : 12 rangées de 2 places à gauche, 12 rangées de 2 places à droite et 1 rangée de 5 places au fond. Les précisions ci-dessous sont valables pour tout l'exercice :

— le chauffeur et sa place ne sont pas pris en compte ;
— les termes «garçons» et «filles» désignent seulement des étudiants, non des accompagnateurs ;
— les réponses aux questions n'ont pas besoin d'être simplifiées.

1. De combien de façons différentes les 50 personnes peuvent-elles s'asseoir dans l'autocar ?

Désormais, on suppose que les 4 premières places (1re rangée à gauche et 1re rangée à droite) sont réservées aux 3 accompagnateurs (qui laissent la quatrième place inoccupée).

2. De combien de façons différentes les 50 personnes peuvent-elles s'asseoir dans l'autocar ?
3. Parmi ces façons, combien d'entre-elles sont telles que (chaque question est indépendante) :
   (a) aucune fille n'est assise dans la rangée du fond ?
   (b) les 5 places de la rangée du fond sont occupées par des filles ?
   (c) dans chacune des 25 rangées, il y a au plus un seul garçon ?
   (d) il y a autant de garçons assis dans les rangées à gauche que dans les rangées à droite (quel que soit le nombre de garçons assis dans la rangée du fond) ?

Problème

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Une p-filtration de E est une p-liste $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p)$ de parties de E telle que $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_p$. Par exemple $(\emptyset, \emptyset, \{1\}, \{1,3\}, \{1,3\}, \{1,2,3\})$ est une 6-filtration de $\{1,2,3\}$, mais aussi de $\{1,2,3,4\}$. Le but de ce problème est de dénombrer les p-filtrations de E. Pour tout couple d'entiers $(n,p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^\star$, on note $F_{n,p}$ le nombre de p-filtrations d'un ensemble à n éléments.

1. Que vaut $F_{0,p}$? Justifier votre réponse.
2. À toute p-filtration $(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p)$ de l'ensemble $\{1\}$, on associe le nombre :
$$\varphi(A_1, A_2, A_3, \dots, A_p) = \mathrm{card}\Big\{ i \in [\![1,p]\!] \mid A_i = \emptyset \Big\}.$$
   (a) Que vaut $\varphi(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \{1\}, \{1\})$ dans le cas $p = 5$?
   (b) Déterminer l'image directe de l'ensemble des p-filtrations de $\{1\}$ par l'application φ.
   (c) Montrer que l'application φ est injective.
   (d) En déduire la valeur de $F_{1,p}$.
3. En remarquant que l'ensemble des 1-filtrations de E est un ensemble du cours, déterminer $F_{n,1}$.
4. Montrer que $F_{n,p} \leqslant 2^{np}$.
5. Dans cette question, on considère le cas $p = 2$.
   (a) Déterminer toutes les 2-filtrations de l'ensemble $\{1,2\}$ et en déduire que $F_{2,2} = 9$.
   (b) Dans cette question, on fixe un entier $k \in [\![0,n]\!]$.
      i. Combien y a-t-il de parties $A_2 \subset E$ telles que $\mathrm{card}(A_2) = k$?
      ii. On fixe une partie $A_2 \subset E$ telle que $\mathrm{card}(A_2) = k$. Combien y a-t-il de parties $A_1 \subset A_2$?
   (c) À l'aide des résultats précédents, écrire $F_{n,2}$ sous la forme d'une somme.
   (d) En déduire que $F_{n,2} = 3^n$.
6. Pour tout entier $p \geqslant 1$, on pose la proposition suivante :
$$\mathscr{H}(p) : \text{«il existe une constante } C_p \in \mathbb{R} \text{ telle que pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_{n,p} = (C_p)^n\text{»}.$$
   Le but de cette question est de montrer que cette proposition est héréditaire. Pour cela, on fixe un entier $p \geqslant 1$ et on suppose que la proposition $\mathscr{H}(p)$ est vraie.
   (a) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$. Combien y a-t-il de $(p+1)$-filtrations $(A_1, A_2, \dots, A_p, A_{p+1})$ de E telles que $\mathrm{card}(A_{p+1}) = k$? Exprimer ce nombre en fonction de k, n et $F_{k,p}$.
   (b) Montrer que $F_{n,p+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (C_p)^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire que $\mathscr{H}(p+1)$ est vraie.
7. À l'aide du résultat de la question précédente, exprimer C_p en fonction de $p \geqslant 1$.
8. Conclure le problème en détaillant votre raisonnement à l'aide des résultats précédents.

DS 3 mathématiques

BCPST 1B 2018-2019

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Étude d'une famille de suites

Dans tout le problème, pour tout $m \in \mathbb{R}$, pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$S_m(a,b) = \{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ suites réelles } | u_0 = a, u_1 = b, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + m \cdot u_n\}.$$

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation d'inconnue complexe x, $E_m : x^2 - x - m = 0$. Déterminer le nombre de solutions réelles de E_m en fonction de m.
2. (INFO) Écrire une fonction `nb_sol(m)` qui renvoie le nombre de solutions réelles de l'équation $x^2 - x - m = 0$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: E_1, $E_{-\frac{1}{3}}$, $E_{-\frac{1}{4}}$. Dans le cas de solutions complexes non réelles donner également une écriture exponentielle des solutions.
4. Soit la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\alpha_0 = 2, \alpha_1 = 3, \forall n \in \mathbb{N}, \alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} - \frac{1}{4}\alpha_n$.
   (a) (INFO) On considère les deux fonctions suivantes écrites en Python :

```
def alpha(n) :
    u0=2
    u1=3
    for i in range(n) :
        u1=u1-0.25*u0
        u1=u0
    return u0
```

```
def alphabis(n) :
    u0=2
    u1=3
    for i in range(n) :
        u=u1
        u1=u-0.25*u0
        u0=u
        return u
```

   Déterminer la valeur de `alpha(3)` et de `alphabis(3)`.
   (b) (INFO) Écrire une fonction `alphater(n)` qui prend en argument un entier n et qui renvoie la valeur de α_n.
   (c) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de α_n en fonction de n.
   (d) Déterminer a, b, m des réels tels que $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$.
5. Soit la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\beta_0 = 0, \beta_1 = 4, \forall n \in \mathbb{N}, \beta_{n+2} = \beta_{n+1} - \frac{1}{3}\beta_n$.
   (a) (INFO) Écrire une fonction `beta(n)` qui renvoie la valeur de β_n. On utilisera la formule de récurrence.
   (b) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de β_n en fonction de n.
   (c) Montrer que $S_{-\frac{1}{4}}(0,4)$ contient comme unique élément la suite $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pourra considérer une suite quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $S_{-\frac{1}{4}}(0,4)$ et montrer par une récurrence double que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \beta_n$.
6. On définit la suite de Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $L_0 = 2, L_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
   (b) (INFO) Déduire de la question 6a une fonction `Lucas(n)` qui renvoie la valeur de L_n.
   (c) Soient a, b, m des réels. Montrer que si $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$ alors $a = 2, b = 1, m = 1$.

7. Soient m, a, b des réels et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $S_m(a,b)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on souhaite simplifier $\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (a) (INFO) Écrire une fonction `suite(a,b,m,n)` qui prend en arguments trois réels a, b, m et un entier n et qui renvoie la valeur de u_n où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$.
   (b) (INFO) On déduit de la question précédente la fonction `somme(a,b,m,n)` définie par

```
def somme(a,b,m,n) :
    S=0
    for i in range(n+1) :
        S=S+suite(a,b,m,n)
    return S
```

   Quelle est la valeur de retour de cette fonction ? Modifier celle-ci pour que la valeur de retour de cette fonction soit $\sum_{k=0}^{n} u_k$, où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un élément de $S_m(a,b)$.
   (c) Cas 1 : $m = 0$.
      i. Calculer $\sum_{k=0}^{0} u_k, \sum_{k=0}^{1} u_k, \sum_{k=0}^{2} u_k$.
      ii. Pour tout $n \geq 2$, simplifier $\sum_{k=0}^{n} u_k$.
   (d) Cas 2 : $m \neq 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier $\sum_{k=0}^{n} u_k$. On pourra remarquer que

$$\forall k \in \mathbb{N}, u_k = \frac{1}{m}\left(u_{k+2} - u_{k+1}\right).$$

   (e) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en déduire $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k, \sum_{k=0}^{n} \beta_k, \sum_{k=0}^{n} L_k$.
8. Dans cette question, on cherche à simplifier diverses sommes faisant intervenir la suite $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie à la question 6.
   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier $\sum_{k=0}^{n} L_{2k}$ et $\sum_{k=0}^{n} L_{2k+1}$.
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{cases} L_{2n} & = & L_n^2 - 2 \cdot (-1)^n \\ L_{2n+1} & = & L_n L_{n+1} - (-1)^n \end{cases}$$

   (c) (INFO) Écrire en python une fonction correspondant au pseudo-code suivant :

```
liste_lucas(n) :
    Si n=0 :
        retourner [2]
    si n=1 :
        retourner [2,0]
    sinon :
        L=[2,0]
        pour  i allant de 0 à n-1 (inclus) :
            si i est pair et est égal à 2k :
                S= L[k]**2-2 (-1)**n
            si i est impair et est égal à 2k+1 :
                S=L[k]*L[k+1]-(-1)**n
            ajouter S à la fin de L
        retourner L
```

   (d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ simplifier $\sum_{k=0}^{n} L_k^2$ et $\sum_{k=0}^{n} L_k L_{k+1}$. On pourra s'aider des questions précédentes.
   (e) (INFO) Écrire une fonction `somme1(n)` qui renvoie la valeur de $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} L_i L_j$. On pourra utiliser la fonction `Lucas` de la question 6b.
   (f) (INFO) Écrire une fonction `somme2(n)` qui renvoie la valeur de $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n} L_i L_j$. On pourra utiliser la fonction `Lucas` de la question 6b.
   (g) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, simplifier $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} L_i L_j$ et $\displaystyle\sum_{0\leq i\leq j\leq n} L_i L_j$. On pourra s'aider de résultats de la question 7.