DS 4 mathématiques

BCPST 1B 2018-2019

— Durée : 3 heures.

— Documents et calculatrice non autorisés.

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Soient $n, \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que P est inversible. Montrer que $PA^kP^{-1} = (PAP^{-1})^k$.

Dans les exercices suivants, on pourra utiliser cette propriété sans justification.

Exercice 2. On définit les matrices A et P par $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer PAP^{-1}.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire PA^nP^{-1}.

Exercice 3. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & -5 \\ 10 & 10 & -8 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: “il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = u_nA + v_nI_3$”.
   (a) Montrons que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
   (b) Montrons que $P(2)$ est vraie et en déduire que A est inversible et calculer son inverse.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $P(n)$ vraie. Montrer que $P(n+1)$ est vraie en exprimant u_{n+1}, v_{n+1} en fonction de u_n, v_n.
   (d) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n et de v_n en fonction de n.
   (e) En déduire une expression de A^n en fonction de n.

Exercice 4. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on définit $I_{p,q}$ par la quantité $\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $I_{p,q} = I_{q,p}$. On pourra effectuer le changement de variable $u = 1 - x$.
2. Calculer $I_{0,0}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_{n,0}$. En déduire $I_{0,n}$.
4. Soient $p \geq 0$ et $q \geq 1$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$.
5. En déduire que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a $I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$. On pourra démontrer la proposition suivante par récurrence :
$$\forall q \in \mathbb{N}, P(q) : \forall p \in \mathbb{N}, I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut obtenir une formule “simple” pour l'expression $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1}$.
   (a) Montrer que $I_{n,n} = S_n$.
   (b) En déduire que $S_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)}$.

Exercice 5. 1. Déterminer l'ensemble D des réels tels que $e^x - e^{-x} > 0$.
On définit la fonction f par : $\forall x \in D,\ f(x) = \ln(e^x - e^{-x})$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2. (a) Étudier les variations de f et donner les limites de f aux bornes de D.
   (b) En déduire l'existence d'un unique réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$, puis donner la valeur exacte de α.
   (c) Montrer que le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse α vaut $\sqrt{5}$.
3. (a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$.
   (b) En déduire l'équation de l'asymptote (Δ) à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
   (c) Donner la position relative de (Δ) et (C).
4. Donner l'allure de la courbe (C) en faisant figurer les droites (Δ) et (T).
   On admettra que $\alpha \simeq 0,5$ et que $\sqrt{5} \simeq 2,2$.

Exercice 6. Dans tout l'exercice n désignera un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. (a) Déterminer, suivant la parité de n, le tableau de variations de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{n+1} + x^n$. On y placera les limites aux bords.
   (b) Montrer que dans tous les cas $f_n\left(-\dfrac{n}{n+1}\right) < 2$.
   (c) En déduire, suivant la parité de n, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x :
   $$x^{n+1} + x^n = 2.$$
2. On note A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, montrer que P est inversible, calculer P^{-1} et $P^{-1}AP$.
3. On considère l'équation matricielle d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
   $$(E_n) \qquad X^{n+1} + X^n = A.$$
   (a) Montrer que la résolution de cette équation peut se ramener à la résolution de l'équation d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:
   $$(E'_n) \qquad Y^{n+1} + Y^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
   (b) Soit Y une solution de (E'_n). On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
      i. Montrer que $DY = YD$.
      ii. En déduire que $b = c = 0$.
      iii. Quelles sont les valeurs possibles de d ?
      iv. Discuter, suivant les valeurs de n, du nombre de solutions de l'équation (E_n).
   (c) On note μ la solution négative de l'équation numérique $x^4 + x^3 = 2$. Déterminer les solutions de l'équation (E_3) à l'aide de μ.