DS 4 mathématiques

BCPST 1B 2018-2019

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Soient $n, \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que P est inversible. Montrer que $PA^kP^{-1} = (PAP^{-1})^k$.

Dans les exercices suivants, on pourra utiliser cette propriété sans justification.

Correction

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $P(k) : PA^kP^{-1} = (PAP^{-1})^k$. Montrons P par récurrence.

- Initialisation : On a $PA^0P^{-1} = I_3$. Donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(k)$ est vraie. Montrons que $P(k+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{array}{rcl} PA^{k+1}P^{-1} & = & PA^kAP^{-1} \\ & = & PA^kP^{-1}PAP^{-1} \end{array}$$

  Or, d'après $P(n), PA^kP^{-1} = (PAP^{-1})^k$. D'où

$$\begin{array}{rcc} PA^{k+1}P^{-1} & = & (PAP^{-1})^k(PAP^{-1}) \\ & = & (PAP^{-1})^{k+1} \end{array}$$

  $P(k+1)$ est donc vraie.
- Conclusion : pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$PA^kP^{-1} = (PAP^{-1})^k.$$

Exercice 2. On définit les matrices A et P par $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -3 & 5 & -2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Calculer PAP^{-1}.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. En déduire PA^nP^{-1}.

Correction

1. Soient X et Y deux éléments de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

On a

$$\begin{aligned}
PX = Y \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Y \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} Y \qquad (L_2 \leftrightarrow L_3) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} Y \qquad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} Y \qquad (L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} Y \qquad (L_2 \leftarrow -L_2) \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} Y \qquad (L_1 \leftarrow L_1 + L_2)
\end{aligned}$$

P est donc inversible et on a $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$

2. D'où :

$$\boxed{PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}}$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n) : PA^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$. Montrons P par récurrence.

   — Initialisation : On a $PA^0P^{-1} = I_3$. Donc $P(0)$ est vraie.

   — Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. On a :

$$\begin{aligned}
PA^{n+1}P^{-1} &= PA^nAP^{-1} \\
&= PA^nP^{-1}PAP^{-1}
\end{aligned}$$

   Or, d'après $P(n), PA^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$. De plus, $PAP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. D'où

$$PA^{n+1}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^{n+1} \end{pmatrix}$$

   $P(n+1)$ est donc vraie.

   — Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\boxed{PA^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}}$$

Exercice 3. On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & -5 \\ 10 & 10 & -8 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: "il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = u_n A + v_n I_3$".
   (a) Montrons que $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
   (b) Montrons que $P(2)$ est vraie et en déduire que A est inversible et calculer son inverse.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $P(n)$ vraie. Montrer que $P(n+1)$ est vraie en exprimant u_{n+1}, v_{n+1} en fonction de u_n, v_n.
   (d) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de u_n et de v_n en fonction de n.
   (e) En déduire une expression de A^n en fonction de n.

Correction

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -5 & -1 & 5 \\ -10 & -10 & 14 \end{pmatrix}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: "il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = u_n A + v_n I_3$".
   (a) On a $A^0 = 0 \cdot A + 1 \cdot I_3$ et $A^1 = 1 \cdot A + 0 \cdot I_3$. $P(0)$ et $P(1)$ sont donc vraies. Il suffit de poser $u_0 = 0, u_1 = 1, v_0 = 1, v_1 = 0$.
   (b) On a $A^2 = -A + 6I_3$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $P(n)$ vraie. Par hypothèse, il existe $(u_n, v_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que
   $$A^n = u_n A + v_n I_3.$$
   D'où, $A^{n+1} = u_n A^2 + v_n A$. Or $A^2 = -A + 6I_3$. D'où
   $$A^{n+1} = u_n(-A + 6I_3) + v_n A = (v_n - u_n)A + 6u_n I_3$$
   On en déduit que $P(n+1)$ est vraie en posant $u_{n+1} = v_n - u_n$ et $v_{n+1} = 6u_n$.
   (d) D'après l'analyse précédente, on a
   $$u_0 = 0, u_1 = 1, v_0 = 1, v_1 = 0 \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = v_n - u_n, v_{n+1} = 6u_n.$$
   On en déduit que
   $$u_0 = 0, u_1 = 1 \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 6u_n - u_{n+1}$$
   et
   $$\forall n \geq 1, v_n = 6u_{n-1}.$$
   On reconnaît que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique : $x^2 + x - 6 = 0$, qui a pour solutions évidentes 2 et -3. Il en résulte qu'il existe A et B des réels tels que
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = A \cdot 2^n + B \cdot (-3)^n.$$
   Déterminons A et B à l'aide de u_0 et v_0. On a
   $$\begin{cases} A + B & = & 0 \\ 2A - 3B & = & 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   Ce qui est équivalent à
   $$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{-1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
   On en déduit que
   $$A = \frac{1}{5}, B = \frac{-1}{5}.$$

On a donc

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{5} \cdot 2^n - \frac{1}{5} \cdot (-3)^n.}$$

D'où

$$\forall n \geq 1, v_n = 6\left(\frac{1}{5} \cdot 2^{n-1} - \frac{1}{5} \cdot (-3)^{n-1}\right).$$

Donc

$$\boxed{\forall n \geq 1, v_n = \frac{3}{5} \cdot 2^n + \frac{2}{5} \cdot (-3)^n.}$$

Constatons que pour $n = 0$, l'égalité est encore vérifiée.

(e) Des calculs précédents, on en déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \left(\frac{1}{5} \cdot 2^n - \frac{1}{5} \cdot (-3)^n\right) A + \left(\frac{3}{5} \cdot 2^n + \frac{2}{5} \cdot (-3)^n\right) I_3.$$

Exercice 4. Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on définit $I_{p,q}$ par la quantité $\int_0^1 x^p(1-x)^q dx$.

1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $I_{p,q} = I_{q,p}$. On pourra effectuer le changement de variable $u = 1 - x$.
2. Calculer $I_{0,0}$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $I_{n,0}$. En déduire $I_{0,n}$.
4. Soient $p \geq 0$ et $q \geq 1$. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I_{p,q} = \frac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}$.
5. En déduire que pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a $I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$. On pourra démontrer la proposition suivante par récurrence :
$$\forall q \in \mathbb{N}, P(q) : \forall p \in \mathbb{N}, I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut obtenir une formule "simple" pour l'expression $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1}$.
   (a) Montrer que $I_{n,n} = S_n$.
   (b) En déduire que $S_n = \frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)}$.

Correction

1. Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Considérons $\phi : x \mapsto 1 - x$. ϕ est bien de classe C^1 sur $[0, 1]$. En posant $u = 1 - x$, $du = -dx$. D'où
$$x^p(1-x)^q dx = (1-u)^p u^q(-du).$$
Donc
$$\begin{array}{rcl} I_{p,q} & = & \int_1^0 (1-u)^p u^q(-du) \\ & = & \int_0^1 u^q(1-u)^p du \\ & = & I_{q,p}. \end{array}$$
On a bien $\boxed{I_{p,q} = I_{q,p}.}$
2. $I_{0,0} = \int_0^1 1dx = \underline{1}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\begin{array}{rcl} I_{n,0} & = & \int_0^1 x^n dx \\ & = & [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_{x=0}^{x=1} \\ & = & \underline{\frac{1}{n+1}}. \end{array}$$
D'après la question 1, $I_{0,n} = I_{n,0}$. Donc $\boxed{I_{0,n} = \frac{1}{n+1}.}$

4. Soient $p \geq 0$ et $q \geq 1$. les fonctions $u : x \mapsto \frac{x^{p+1}}{p+1}, v : x \mapsto x^q$ sont C^1 sur $[0,1]$.

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \int_0^1 u'(x)v(x)dx \\ &= [\tfrac{x^{p+1}}{p+1}(1-x)^q]_{x=0}^1 - \int_0^1 \tfrac{x^{p+1}}{p+1}(-q(1-x)^{q-1})dx \quad \text{en intégrant par parties} \\ &= \tfrac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}dx \\ &= \underline{\tfrac{q}{p+1} I_{p+1,q-1}} \end{aligned}$$

5. Pour tout $q \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(q) : \forall p \in \mathbb{N}, I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.$$

Montrons P par récurrence.

— Initialisation : $q = 0$. Soit $p \in \mathbb{N}$. D'après la question 3, $I_{p,0} = \frac{1}{p+1}$. Or $\frac{p!0!}{(p+1+0)!} = \frac{1}{p+1}$. Donc $P(0)$ est vraie.

— Soit $q \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(q)$ est vraie. Montrons que $P(q+1)$ est vraie. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$I_{p,q+1} = \frac{q+1}{p+1} I_{p+1,q}, \text{ d'après la question 4}$$

Or d'après l'hypothèse de récurrence, $I_{p+1,q} = \frac{(p+1)!q!}{(p+1+q+1)!}$. D'où

$$\begin{aligned} I_{p,q+1} &= \tfrac{q+1}{p+1}\tfrac{(p+1)!q!}{(p+(q+1)+1)!} \\ &= \tfrac{p!(q+1)!}{(p+(q+1)+1)!} \end{aligned}$$

$P(q+1)$ est donc vraie.

— Conclusion : il en résulte que pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\boxed{I_{p,q} = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}.}$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut obtenir une formule "simple" pour l'expression $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{n+k+1}$.

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} I_{n,n} &= \int_0^1 x^n(1-x)^n dx \\ &= \int_0^1 x^n (\textstyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-x)^k)dx \quad \text{d'après formule du binome} \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k \int_0^1 x^{n+k}dx \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k \frac{1}{n+k+1} \\ &= \boxed{S_n} \end{aligned}$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$S_n = I_{n,n}.$$

Mais $I_{n,n} = \frac{n!n!}{(2n+1)!}$ d'après la question 5. D'où

$$\begin{aligned} I_{n,n} &= \frac{n!n!}{(2n)!(2n+1)} \\ &= \frac{1}{\frac{2n!}{n!n!}(2n+1)} \\ &= \boxed{\frac{1}{\binom{2n}{n}(2n+1)}} \end{aligned}$$

Exercice 5. 1. Déterminer l'ensemble D des réels tels que $e^x - e^{-x} > 0$.
On définit la fonction f par : $\forall x \in D,\ f(x) = \ln\left(e^x - e^{-x}\right)$.
On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2. (a) Étudier les variations de f et donner les limites de f aux bornes de D.
   (b) En déduire l'existence d'un unique réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$, puis donner la valeur exacte de α.
   (c) Montrer que le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse α vaut $\sqrt{5}$.
3. (a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$.
   (b) En déduire l'équation de l'asymptote (Δ) à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.
   (c) Donner la position relative de (Δ) et (C).
4. Donner l'allure de la courbe (C) en faisant figurer les droites (Δ) et (T).
   On admettra que $\alpha \simeq 0,5$ et que $\sqrt{5} \simeq 2,2$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} e^x - e^{-x} > 0 &\Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0 \quad \text{car } e^x > 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} > 1 \\ &\Leftrightarrow 2x > 0 \qquad \text{car ln strictement croissante sur } R^{+\star} \\ &\Leftrightarrow x > 0. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\boxed{D =]0, +\infty[}$.

2. (a) Comme on a $f = \ln\circ(\exp - \exp\circ Id)$, que les fonctions ln, exp et Id sont dérivables sur leur domaine de définition et que $\exp - \exp\circ Id$ est strictement positif sur $\mathbb{R}^{+\star}$, f est donc dérivable sur $\mathbb{R}^{+\star}$ et

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Or pour tout $x > 0$, $e^x > 0, e^{-x} > 0, e^x - e^{-x} > 0$. Donc pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$.
f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
Calculons les limites aux bornes.
On a $\lim_{x\to 0^+} e^x = 1, \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1$. Donc $\lim_{x\to 0^+}(e^x - e^{-x}) = 0$. Or $\lim_{u\to 0^+} \ln(u) = -\infty$. Par composition des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to 0^+} \ln(e^x - e^{-x}) = -\infty.}$$

De plus, $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty, \lim_{x\to-\infty} e^{-x} = 0$. Or $\lim_{u\to+\infty} \ln(u) = +\infty$. Par composition des limites,

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \ln(e^x - e^{-x}) = +\infty.}$$

(b) Récapitulons :

- f est dérivable sur $]0,+\infty[$ donc continue sur $]0,+\infty[$,
- f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$,
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty, \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel α tel que

$$\boxed{f(\alpha) = 0.}$$

Calculons α. Résolvons l'équation

$$\ln(e^x - e^{-x}) = 0$$

avec $x > 0$.

$$\begin{aligned} \ln(e^x - e^{-x}) = 0 &\Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 1 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} - e^x - 1 = 0 \end{aligned}$$

Posons $X = e^x$. L'équation est alors équivalente à

$$X^2 - X - 1 = 0, X > 1.$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $1 + 4 = 5$. Les solutions réelles sont donc

$$X_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, X_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Or $X_1 < 0, X_2 > 1$. On en déduit que $e^x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On en déduit que $\boxed{\alpha = \ln(\frac{1+\sqrt{5}}{2})}$.

(c) On sait que ce coefficient directeur est égal à $f'(\alpha)$. Calculons cette quantité :

$$\begin{aligned} f'(\alpha) &= \frac{e^\alpha + e^{-\alpha}}{e^\alpha - e^{-\alpha}} \\ &= \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}}}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{1+\sqrt{5}}} \\ &= \frac{\frac{(1+\sqrt{5})^2+4}{2(1+\sqrt{5}}}{\frac{(1+\sqrt{5})^2-4}{2(1+\sqrt{5})}} \\ &= \frac{1+2\sqrt{5}+5+4}{1+2\sqrt{5}+5-4} \\ &= \frac{10+2\sqrt{5}}{2+2\sqrt{5}} \\ &= \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}} \\ &= \sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}+1}{1+\sqrt{5}}) \\ &= \boxed{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

3. (a) Soit $x > 0$.

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \ln(e^x - e^{-x}) - x \\ &= \ln(e^x(1 - e^{-2x})) - x \\ &= x + \ln(1 - e^{-2x})) - x \\ &= \ln(1 - e^{-2x})) \end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-2x} = 1$. Par composition, on en déduit que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1 - e^{-2x}) = 0.$$

Autrement dit,

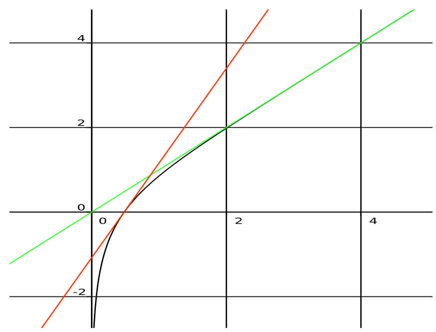
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = 0.$$

Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$.

(b) Du calcul précédent, on en déduit l'asymptote de (C) a pour équation $y = x$.

(c) Du calcul de la question 3.a, on a $f(x)-x = \ln(1-e^{-2x})$. Or $x > 0$. Donc $0 < 1-e^{-2x} < 1$. D'où $\ln(1-e^{-2x}) < 0$. Donc $f(x) - x < 0$. En déduit que (C) est en dessous de Δ.

4. Voici le graphe demandé :



En rouge : (T), en vert : (Δ), en noir : (C).

Exercice 6. Dans tout l'exercice n désignera un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. (a) Déterminer, suivant la parité de n, le tableau de variations de la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{n+1} + x^n$. On y placera les limites aux bords.

   (b) Montrer que dans tous les cas $f_n\left(-\dfrac{n}{n+1}\right) < 2$.

   (c) En déduire, suivant la parité de n, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x :

$$x^{n+1} + x^n = 2.$$

2. On note A la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, montrer que P est inversible, calculer P^{-1} et $P^{-1}AP$.

3. On considère l'équation matricielle d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$(E_n) \qquad X^{n+1} + X^n = A.$$

   (a) Montrer que la résolution de cette équation peut se ramener à la résolution de l'équation d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$(E'_n) \qquad Y^{n+1} + Y^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (b) Soit Y une solution de (E'_n). On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

      i. Montrer que $DY = YD$.

      ii. En déduire que $b = c = 0$.

      iii. Quelles sont les valeurs possibles de d ?

      iv. Discuter, suivant les valeurs de n, du nombre de solutions de l'équation (E_n).

(c) On note μ la solution négative de l'équation numérique $x^4 + x^3 = 2$. Déterminer les solutions de l'équation (E_3) à l'aide de μ.

Correction

1. (a) f_n étant une fonction polynomiale, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_n'(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1}.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_n'(x) = x^{n-1}((n+1)x + n)$.

— Cas 1 : n est pair. $f_n'(x)$ est donc du signe de $x((n+1)x+n)$. On en déduit que
  — pour tout $x \in]-\frac{n}{n+1}, 0[$, $f_n'(x) < 0$,
  — pour tout $x \in]-\infty, -\frac{n}{n+1}[\cup]0, +\infty[$, $f_n'(x) > 0$,
  — $f_n'(0) = f_n'(\frac{-n}{n+1}) = 0$.

  Calculons les limites aux bords. On a

$$x^{n+1} + x^n = x^n(x+1).$$

  On en déduit par opération sur les limites et n étant paire, $\lim_{x\to-\infty} = -\infty$, $\lim_{x\to+\infty} +\infty$.
  On en déduit alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{n}{n+1}$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(-\frac{n}{n+1})$	↘	0	↗	$+\infty$

— Cas 2 : n est impair. $f_n'(x)$ est donc du signe de $((n+1)x+n)$. On en déduit que
  — pour tout $x \in]-\infty, -\frac{n}{n+1}[, f_n'(x) < 0$,
  — pour tout $x \in]-\frac{n}{n+1}, +\infty[, f_n'(x) > 0$,
  — $f_n'(\frac{-n}{n+1}) = 0$.

  Calculons les limites aux bords. On a

$$x^{n+1} + x^n = x^n(x+1).$$

  On en déduit par opération sur les limites et n étant impaire, $\lim_{x\to-\infty} = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} +\infty$.

x	$-\infty$		$-\frac{n}{n+1}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\frac{-n}{n+1})$	↗	$+\infty$

(b) Soit $n \geq 2$.

$$\begin{aligned} f_n(\tfrac{-n}{n+1}) &= (\tfrac{-n}{n+1})^n(-\tfrac{n}{n+1} + 1) \\ &= (-\tfrac{n}{n+1})^n \tfrac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Donc $|(-\frac{n}{n+1})^n \frac{1}{n+1}| \leq \frac{1}{n+1} < 2$. On a bien

$$\boxed{f_n(\frac{-n}{n+1}) < 2.}$$

(c) — Cas 1 : n est pair. D'après les variations de f_n et l'inégalité $f_n(\frac{-n}{n+1}) < 2$, on en déduit que f_n est strictement majorée par 2 sur $]-\infty, 0]$. Ainsi, l'équation n'a pas de solution sur cet intervalle. De plus,
  — f_n est continue sur $[0, +\infty[$,
  — f_n est strictement croissante sur $[0, +\infty[$,
  — $\lim_{x\to 0} f_n(x) = 0, \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty$,
  — $2 \in \mathbb{R}^+$,

  d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \geq 0$ tel que $f_n(\alpha) = 2$. Il en résulte que l'équation admet une unique solution positive.

— Cas 2 : n est impair. On a :
  — f_n est continue sur $]-\infty, \frac{-n}{n+1}]$,
  — f_n est strictement décroissante sur $]-\infty, \frac{-n}{n+1}]$,
  — $\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty, f_n(\frac{-n}{n+1}) < 2$,
  — $2 \in [f_n(\frac{-n}{n+1}), +\infty[$.

  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha \in]-\infty, \frac{-n}{n+1}]$ tel que $f_n(\alpha) = 2$.
  De même, on a :
  — f_n est continue sur $[\frac{-n}{n+1}, +\infty[$,
  — f_n est strictement croissante sur $[\frac{-n}{n+1}, +\infty[$,
  — $f_n(\frac{-n}{n+1}) < 2, \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty, f_n(0) = 0$
  — $2 \in [f_n(\frac{-n}{n+1}), +\infty[$.

  D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\beta \in [\frac{-n}{n+1}, +\infty[$ tel que $f_n(\beta) = 2$. De plus, $\beta > 0$.
  On en déduit que cet équation admet exactement deux solutions. L'une strictement négative, l'autre strictement positive.

2. Calculons le déterminant de P :
$$\det(P) = 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = -2 \neq 0.$$
P est donc inversible et $P^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
Calculons $P^{-1}AP$:
$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \underline{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \end{aligned}$$

3. (a) Soit $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tel que :
$$(E_n) \qquad X^{n+1} + X^n = A.$$
Or
$$\begin{aligned} (E_n) &\Leftrightarrow P^{-1}(X^{n+1} + X^n)P = P^{-1}AP \\ &\Leftrightarrow P^{-1}X^{n+1}P + P^{-1}X^nP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Or, $P^{-1}X^{n+1}P=(P^{-1}XP)^{n+1}, P^{-1}X^nP=(P^{-1}XP)^n$. En posant $Y=P^{-1}XP$, on en déduit que

$$(E_n) \Leftrightarrow Y^{n+1}+Y^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) i. On a

$$\begin{array}{rcl} DY & = & (Y^{n+1}+Y^n)Y \\ & = & Y^{n+2}+Y^{n+1} \\ & = & Y(Y^{n+1}+Y^n) \\ & = & YD. \end{array}$$

ii. En calculant, on obtient $DY = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $YD = \begin{pmatrix} 2a & 0 \\ 2c & 0 \end{pmatrix}$. Or $DY=YD$, on en déduit que $2b=0, 2c=0$. D'où $b=0, c=0$.

iii. Il en résulte que Y est solution si et seulement si

$$Y^{n+1}+Y^n = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^{n+1}+a^n & 0 \\ 0 & d^{n+1}+d^n \end{pmatrix} = D$$

Il en résulte que d est solution de $d^{n+1}+d^n=0$, autrement dit $d^n(d+1)=0$. On en déduit que les valeurs possibles pour d sont 0 et -1.

iv. Ainsi, Y est solution de E'_n si et seulement si $a^{n+1}+a^n=2$ et $d^{n+1}+d^n=0$. Il en résulte, d'après les questions précédentes que

— cas 1 : n pair. Le nombre de solutions de E'_n est égal à 4.

— cas 2 : n impair. Le nombre de solutions de E'_n est égal à 2.

Or Y est solution de E'_n si et seulement si PYP^{-1} est solution de E_n. Donc le nombre de solutions de E_n est égal au nombre de solutions de E'_n. D'où

— cas 1 : n pair. Le nombre de solutions de E_n est égal à 4.

— cas 2 : n impair. Le nombre de solutions de E_n est égal à 2.

(c) D'après les questions précédentes, les solutions de E'_3 sont exactement :

$$\begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En calculant $P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}P^{-1}$, on obtient

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ \alpha-\beta & \alpha+\beta \end{pmatrix}$$

Il en résulte que les solutions de E_3 sont exactement

$$\boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mu & \mu \\ \mu & \mu \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mu-1 & \mu+1 \\ \mu+1 & \mu-1 \end{pmatrix}, \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$