DS 5 mathématiques

BCPST 1B 2018-2019

— Durée : 3 heures.

— Documents et calculatrice non autorisés.

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de x_n en fonction de n, x_0, x_1.
2. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Soient a et b deux réels supérieurs ou égaux à 1. On étudie la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a \ \ u_1 = b$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie $u_n \geq 1$.
4. (info) Écrire une fonction `calcul_u(n,a,b)` qui prend en arguments deux réels a, b et un entier naturel et qui renvoie la valeur u_n.
5. Montrer que la seule limite possible de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 4.

On se propose d'établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'étude d'une suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$$

5. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.
6. Vérifier, pour tout entier naturel n : $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.

   En déduire que : $|v_{n+2}| \leq \dfrac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right)$. Indication : on pourra commencer par montrer que $2(2 + v_{n+2}) \geq 3$.
7. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n,

   $$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

   Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leq x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Soit $n \geq 1$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \{n+1, n+2, \cdots, 2n-1, 2n\}$, on a : $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{t-1}}$.
   (b) En déduire que pour tout $k \in \{n+1, n+2, \cdots, 2n-1, 2n\}$, on a

   $$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

2. Soit $n \geq 1$. Déduire des questions précédentes que $2(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}) \leq S_n \leq 2(\sqrt{2n} - \sqrt{n})$.
3. En déduire un équivalent de S_n de la forme Cn^α où C et α sont des réels.

Exercice 3. On définit la famille de polyômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$P_0(X) = X, \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = (1+X^2)P_n'(X).$$

1. Calculer P_1, P_2, P_3.
2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n.
3. Soit Q un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. Montrer que :
   (a) si $Q(-X) = Q(X)$ alors $Q'(-X) = -Q'(X)$;
   (b) si $Q(-X) = -Q(X)$ alors $Q'(-X) = Q'(X)$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est :
   — impair si l'entier n est pair ;
   — pair sinon.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note c_n le coefficient dominant de P_n. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer c_{n+1} en fonction de n et c_n. En déduire une expression de c_n en fonction de n.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on rappelle que $\tan^{(n)}$ désigne la fonction obtenue en dérivant tan n fois. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)} = P_n \circ \tan$. On pourra procéder par récurrence sur n.
7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et Q un polynôme tels que $\tan^{(n)} = Q \circ \tan$. Montrer que $Q = P_n$.
8. Déduire des questions précédentes $\tan^{(5)}(0)$.

Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $a_{n,k}$ est le coefficient de degré k du polynôme P_n. Ainsi, on a

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} X^k.$$

9. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,
$$a_{n+1,k} = (k-1)a_{n,k-1} + (k+1)a_{n,k+1}.$$
avec comme convention $a_{n,-1} = 0$, $a_{n,k} = 0$ si $k > n+1$.
10. (info) Écrire une fonction `matrice(n)` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie une matrice A tel que :
$$\forall i \in \{0, \cdots, n\}, \forall j \in \{0, \cdots, n+1\}, A[i][j] = a_{i,j}.$$

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, une permutation signée de taille n est une liste L d'entiers de longueur n vérifiant les propriétés suivantes :

— L est une liste sans répétition,
— L contient uniquement les entiers de $B_n = \{-n, -n+1, \cdots, -2, -1, 1, 2, \cdots, n\}$,
— pour tout $k \in B_n$ et L une permutation signée de taille n, si k est un élément de L alors $-k$ n'est pas un élément de L.

On note $\mathfrak{S}_n^{\pm}$ l'ensemble des permutations signées de taille n. Étant donnée une permutation signée L de taille n, le nombre de changements de signe dans L, noté $\mathrm{cs}(L)$ est défini par $\mathrm{Card}\{i \in \{0, \cdots, n-2\} | L[i]L[i+1] < 0\}$.

On a par exemple, $\mathfrak{S}_1^{\pm} = \{[-1], [1]\}$.

1. Décrire l'ensemble $\mathfrak{S}_2^{\pm}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le cardinal de $\mathfrak{S}_n^{\pm}$.
2. Pour $L = [4, -1, 3, -2]$, déterminer $\mathrm{cs}(L)$.
3. (info) Écrire une fonction `est_permut_signee(L)` qui prend en argument une liste L et qui renvoie `True` si L représente une permutation signée de $\mathfrak{S}_{len(L)}^{\pm}$ et `False` sinon.
4. (info) Écrire une fonction `chgt_signe(L)` qui prend en argument une permutation signée L et qui renvoie $\mathrm{cs}(L)$.

   On dit qu'une permutation signée L de taille n est un serpent si : $L[0] < L[1] > L[2] \cdots L[n-1]$.
   Ainsi, pour tout $i \in \{0, \cdots, n-2\}$, $L[i] > L[i+1]$ si i est impair et $L[i] < L[i+1]$ sinon.
5. Déterminer tous les serpents de taille 3.
6. (info) Écrire une fonction `est_serpent(L)` qui prend en argument une liste qui représente une permutation signée et qui renvoie `True` si L est un serpent et `False` sinon.
7. Soit $n \geq 1$. Déterminer le nombre de serpents L de $\mathfrak{S}_n^{\pm}$ tels que $\mathrm{cs}(L) = n-1$.