DS 5 mathématiques

BCPST 1B 2018-2019

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de x_n en fonction de n, x_0, x_1.
2. Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

Soient a et b deux réels supérieurs ou égaux à 1. On étudie la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a$ $u_1 = b$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n+1}}$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, u_n est bien défini et vérifie $u_n \geq 1$.
4. (info) Écrire une fonction `calcul_u(n,a,b)` qui prend en arguments deux réels a, b et un entier naturel et qui renvoie la valeur u_n.
5. Montrer que la seule limite possible de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 4.

On se propose d'établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'étude d'une suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$$

5. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 4$.
6. Vérifier, pour tout entier naturel n : $v_{n+2} = \dfrac{v_{n+1} + v_n}{2(2 + v_{n+2})}$.

   En déduire que : $|v_{n+2}| \leq \dfrac{1}{3}\left(|v_{n+1}| + |v_n|\right)$. Indication : on pourra commencer par montrer que $2(2 + v_{n+2}) \geq 3$.
7. On note $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $x_0 = |v_0|$, $x_1 = |v_1|$ et, pour tout entier naturel n,

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

   Montrer que, pour tout entier naturel n, $|v_n| \leq x_n$ et conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Correction

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels vérifiant pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, la relation :

$$x_{n+2} = \frac{1}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{1}{3} = 0.$$

   Cette équation ayant comme discriminant $\Delta = \frac{1}{9} + \frac{4}{3} = \frac{13}{9}$. Elle admet les deux solutions réelles suivantes : $r_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{6}, r_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}$. Il existe donc deux réels A, B tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n = A(\frac{1-\sqrt{13}}{6})^n + B(\frac{1+\sqrt{13}}{6})^n.$$

Déterminons A, B en fonction de x_0, x_1.

$$\left\{\begin{array}{lcllcl} A & + & B & = & x_0 \\ (\frac{1-\sqrt{13}}{6})A & + & (\frac{1+\sqrt{13}}{6})B & = & x_1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (\frac{1-\sqrt{13}}{6}) & (\frac{1+\sqrt{13}}{6}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

Or $1 \cdot (\frac{1+\sqrt{13}}{6}) - 1 \cdot (\frac{1-\sqrt{13}}{6}) = \frac{\sqrt{13}}{3} \neq 0$. Donc la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ (\frac{1-\sqrt{13}}{6}) & (\frac{1+\sqrt{13}}{6}) \end{pmatrix}$ est inversible et on en déduit que le système précédent est équivalent à

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \frac{3}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} (\frac{1+\sqrt{13}}{6}) & -1 \\ -(\frac{1-\sqrt{13}}{6}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

En calculant et en simplifiant :

$$A = \frac{\sqrt{13}+13}{26}x_0 - \frac{3\sqrt{13}}{13}x_1, B = \frac{13-\sqrt{13}}{26}x_0 + \frac{3\sqrt{13}}{13}x_1.$$

D'où

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, x_n = \left(\frac{\sqrt{13}+13}{26}x_0 - \frac{3\sqrt{13}}{13}x_1\right)\left(\frac{1-\sqrt{13}}{6}\right)^n + \left(\frac{13-\sqrt{13}}{26}x_0 + \frac{3\sqrt{13}}{13}x_1\right)\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right)^n.}$$

2. On a $9 < 13 < 16$. Par stricte croissance de la racine carrée, on a donc $3 < \sqrt{13} < 4$. D'où

$$\frac{2}{3} < \frac{1+\sqrt{13}}{6} < \frac{5}{6} \text{ et } \frac{-1}{2} < \frac{1-\sqrt{13}}{6} < \frac{-1}{3}.$$

On en déduit que les suites géométriques de raison $(\frac{1+\sqrt{13}}{6})$ et de raison $(\frac{1-\sqrt{13}}{6})$ ont pour limite 0. Par somme, on en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\boxed{\lim_{n\to+\infty} x_n = 0}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n) : u_n \geq 1, u_{n+1} \geq 1$$

Montrons P par récurrence.

— Initialisation : $u_0 = a \geq 1, u_1 = b \geq 1$ par hypothèse. Donc $P(0)$ est vraie.

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Par hypothèse, $u_n \geq 1$ et $u_{n+1} \geq 1$. D'où $\sqrt{u_n} \geq 1$ et $\sqrt{u_{n+1}} \geq 1$. En sommant, $u_{n+2} \geq 2 \geq 1$. On a bien $u_{n+1} \geq 1, u_{n+2} \geq 1$. Donc $P(n+1)$ est vraie.

— Conclusion : on en déduit que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1.}$$

4. (info) Écrire une fonction `calcul_u(n,a,b)` qui prend en arguments deux réels a, b et un entier naturel et qui renvoie la valeur u_n. Voici la fonction demandée :

```
def calcul_u(n,a,b) :
    u0=a
    u1=b
    for i in range(n) :
        c=u1
        u1=u1**0.5 + u0**0.5
        u0=u1
    return  u0
```

5. Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Notons l sa limite. par continuité de la racine carrée et par somme de limite, on en déduit que l vérifie

$$l = 2\sqrt{l}.$$

Donc, en élevant au carrée, on en déduit que $l^2 = 4l$. D'où $l = 0$ ou $l = 4$. Or la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 1. D'où la seule limite possible est $\boxed{l = 4}$.

On se propose d'établir la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par l'étude d'une suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_n = \frac{1}{2}\sqrt{u_n} - 1$. D'où $u_n = 4(v_n+1)^2$. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Il en résulte que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 4$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})} &= \frac{\frac{1}{2}\sqrt{u_{n+1}}-1+\frac{1}{2}\sqrt{u_n}-1}{2(2+v_{n+2})}\\ &= \frac{\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_n}-4}{4(2+v_{n+2}}\\ &= \frac{u_{n+2}-4}{4(2+v_{n+2})}\end{aligned}$$

Or $u_{n+2} = 4(v_{n+2}+1)^2$. D'où

$$\begin{aligned}\frac{v_{n+1}+v_n}{2(2+v_{n+2})} &= \frac{4(v_{n+2}+1)^2-4}{4(2+v_{n+2})}\\ &= \frac{v_{n+2}(2+v_{n+2})}{(2+v_{n+2})}\\ &= \underline{v_{n+2}.}\end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $v_{n+2} = \frac{1}{2}\sqrt{u_{n+2}} - 1$. Or $u_{n+2} \geq 1$. Donc $v_{n+2} + 2 \geq 2 - \frac{1}{2}$. D'où $2(v_{n+2}+2) \geq 3$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit que

$$< 0\frac{1}{2(v_{n+2}+2)} \leq \frac{1}{3}$$

D'où

$$0 < \frac{|v_{n+1}+v_n|}{2(v_{n+2}+2)} \leq \frac{|v_{n+1}+v_n|}{3}$$

D'où $|v_{n+2}| \leq \frac{|v_{n+1}+v_n|}{3} \leq \frac{1}{3}(|v_{n+1}|+|v_n|)$ par inégalité triangulaire.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(n) : |v_n| \leq x_n, |v_{n+1}| \leq x_{n+1}.$$

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie par récurrence.
   - Initialisation : $x_0 = |v_0|$ et $x_1 = |v_1|$. Donc $P(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. On a donc $|v_n| \leq x_n$ et $|v_{n+1}| \leq x_{n+1}$. D'où

   $$\frac{1}{3}(|v_n|+|v_{n+1}|) \leq \frac{1}{3}(x_{n+1}+x_n).$$

   Or $|v_{n+2}| \leq \frac{1}{3}(|v_n|+|v_{n+1}|)$ et $\frac{1}{3}(x_{n+1}+x_n) = x_{n+2}$. D'où $|v_{n+2}| \leq x_{n+2}$. $P(n+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq x_n$.

On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq x_n$. Or $\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$ d'après la question 2. Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Il en résulte, d'après la question 5 que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 4.

Exercice 2. Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Soit $n \geq 1$.
   (a) Montrer que pour tout $k \in \{n+1, n+2, \cdots, 2n-1, 2n\}$, on a : $\forall t \in [k, k+1]$, $\frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{t-1}}$.
   (b) En déduire que pour tout $k \in \{n+1, n+2, \cdots, 2n-1, 2n\}$, on a

   $$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$

2. Soit $n \geq 1$. Déduire des questions précédentes que $2(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}) \leq S_n \leq 2(\sqrt{2n} - \sqrt{n})$.
3. En déduire un équivalent de S_n de la forme Cn^α où C et α sont des réels.

Correction

1. Soit $n \geq 1$.
   (a) Soit $k \in \{n+1, \cdots, 2n\}$ et soit $t \in [k, k+1]$. On a
   $$k \leq t \leq k+1.$$
   Donc
   $$k \leq t, t-1 \leq k.$$
   Par croissance de la racine carrée sur R^+, d'où
   $$\sqrt{t-1} \leq k \leq \sqrt{t}.$$
   Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit que
   $$\boxed{\frac{1}{\sqrt{t-1}} \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{t}}.}$$
   (b) Soit $k \in \{n+1, \cdots, 2n\}$. D'après la question précédente,
   $$\forall t \in [k, k+1], \frac{1}{\sqrt{t}} \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{t-1}}.$$
   Par croissance de l'intégrale, on obtient en intégrant :
   $$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t-1}} dt.$$
   D'où,
   $$\boxed{2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).}$$
2. Soit $n \geq 1$. Pour tout $k \in \{n+1, \cdots, 2n\}$, on a
   $$2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$
   En sommant sur $\{n+1, \cdots, 2n\}$, on obtient
   $$\sum_{k=n+1}^{2n} 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} 2(\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$
   D'où
   $$2 \sum_{k=n+1}^{2n} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \leq S_n \leq 2 \sum_{k=n+1}^{2n} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}).$$
   À droite et à gauche des inégalités, on reconnaît des sommes télescopiques. D'où
   $$\boxed{2(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}) \leq S_n \leq 2(\sqrt{2n} - \sqrt{n}).}$$
3. Soit $n \geq 1$, on a
   $$2(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}) \leq S_n \leq 2(\sqrt{2n} - \sqrt{n}).$$
   En divisant par $2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n}$, on obtient
   $$\frac{\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+1}}{(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n}} \leq \frac{S_n}{2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n}} \leq 1.$$
   d'où
   $$\frac{\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{(\sqrt{2} - 1)} \leq \frac{S_n}{2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n}} \leq 1.$$
   Or $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{2+\frac{1}{n}} - \sqrt{1+\frac{1}{n}}}{(\sqrt{2}-1)} = 1$. Par théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{n}} = 1$. Donc
   $$\boxed{S_n \sim_{n \to +\infty} 2(\sqrt{2} - 1)\sqrt{n}.}$$

Exercice 3. On définit la famille de polyômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$P_0(X) = X, \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = (1+X^2)P_n'(X).$$

1. Calculer P_1, P_2, P_3.
2. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de P_n.
3. Soit Q un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$. Montrer que :
   (a) si $Q(-X) = Q(X)$ alors $Q'(-X) = -Q'(X)$;
   (b) si $Q(-X) = -Q(X)$ alors $Q'(-X) = Q'(X)$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n est :
   — impair si l'entier n est pair ;
   — pair sinon.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note c_n le coefficient dominant de P_n. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer c_{n+1} en fonction de n et c_n. En déduire une expression de c_n en fonction de n.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on rappelle que $\tan^{(n)}$ désigne la fonction obtenue en dérivant tan n fois. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\tan^{(n)} = P_n \circ \tan$. On pourra procéder par récurrence sur n.
7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et Q un polynôme tels que $\tan^{(n)} = Q \circ \tan$. Montrer que $Q = P_n$.
8. Déduire des questions précédentes $\tan^{(5)}(0)$.

Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $a_{n,k}$ est le coefficient de degré k du polynôme P_n. Ainsi, on a

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k}X^k.$$

9. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1,k} = (k-1)a_{n,k-1} + (k+1)a_{n,k+1}.$$

   avec comme convention $a_{n,-1} = 0$, $a_{n,k} = 0$ si $k > n+1$.
10. (info) Écrire une fonction `matrice(n)` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie une matrice A tel que :

$$\forall i \in \{0, \cdots, n\}, \forall j \in \{0, \cdots, n+1\}, A[i][j] = a_{i,j}.$$

Correction

On définit la famille de polyômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$P_0(X) = X, \forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1}(X) = (1+X^2)P_n'(X).$$

1. On a $\boxed{P_1 = 1+X^2, P_2 = 2X+2X^3, P_3 = 2+8X^2+6X^4}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$H(n) : \deg(P_n) = n+1.$$

   Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(n)$ est vraie par récurrence.
   — Initialisation : $P_0 = X$, donc $\deg(P_0) = 1 = 0+1$. Donc $H(0)$ est vraie.
   — Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Par hypothèse, P_n est de degré $n+1$. Donc P_n' est de degré n. D'où $(X^2+1)P_n'$ est de degré $n+2 = n+1+1$. Autrement dit, $\deg(P_{n+1}) = (n+1)+1$. $H(n+1)$ est donc vraie.
   — Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\underline{\deg(P_n) = n+1}$.
3. Soit Q un polynôme à coefficients dans $\mathbb{C}$.
   (a) Supposons que $Q(-X) = Q(X)$. En dérivant ces polynômes, à gauche on obtient $-Q'(-X)$ et à droite on a $Q'(X)$. D'où $-Q'(-X) = Q'(X)$. On a bien $Q'(-X) = -Q'(X)$.
   (b) Supposons que $Q(-X) = -Q(X)$. En dérivant ces polynômes, on obtient à gauche $-Q'(-X)$ et à droit on a $-Q'(X)$. Il en résulte que $-Q'(-X) = -Q'(X)$. D'où $Q'(-X) = Q'(X)$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$H(n) : P_n \text{ impair si } n \text{ pair}, P_n \text{ pair si } n \text{ impair}$$
Montrons H par récurrence.
   - Initialisation : $P_0 = X$ est bien impair. Donc P_0 est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $H(n)$ est vraie.
     - Cas 1 : n est pair.
       Donc P_n est impair par hypothèse. D'où P_n' est pair d'après la question 4. On a donc
       $$P_{n+1}(-X) = (1+(-X)^2)P_n'(-X) = (1+X^2)P_n'(X) = P_{n+1}(X)$$
       P_{n+1} est bien pair.
     - Cas 2 : n est impair. Donc P_n est pair par hypothèse. D'où P_n' est impair d'après la question 4. On a donc
       $$P_{n+1}(-X) = (1+(-X)^2)P_n'(-X) = -(1+X^2)P_n'(X) = -P_{n+1}(X)$$
       P_{n+1} est bien impair.

     $H(n+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $H(n)$ est donc vraie.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a la relation
$$P_{n+1}(X) = (X^2+1)P_n'(X).$$
Or le coefficient dominant de $P_n'(X)$ est $(n+1)c_n$. On en déduit que
$$c_{n+1} = (n+1)c_n.$$
Or $c_0 = 1$. On a donc $c_n = n(n-1)\cdots 1 \cdot c_0 = n!$. D'où
$$\boxed{c_n = n!}.$$
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$H(n) : \tan^{(n)} = P_n \circ \tan\,.$$
Démontrons H par récurrence.
   - Initialisation : $P_0(\tan) = \tan = \tan^{(0)}$. Donc $H(0)$ est vraie.
   - Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $H(n)$ est vraie. On a donc
   $$\tan^{(n)} = P_n \circ \tan\,.$$
   tan étant indéfiniment dérivable sur son domaine de définition, $\tan^{(n+1)}$ est bien définie. De plus,
   $$\tan^{(n+1)} = (1+\tan^2)\cdot(P_n' \circ \tan).$$
   Or $P_{n+1} \circ \tan = (1+\tan^2)\cdot P_n' \circ \tan$. D'où $\tan^{(n+1)} = P_{n+1} \circ \tan$. $H(n+1)$ est bien vraie.
   - Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a bien $\underline{\tan^{(n)} = P_n \circ \tan}$.
7. Soient $n \in \mathbb{N}$ et Q un polynôme tels que $\tan^{(n)} = Q \circ \tan$. On a donc : $P_n \circ \tan = Q \circ \tan$. On a donc :
$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, (P_n - Q)(\tan(x)) = 0.$$
Or tan réalise une bijection entre $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\mathbb{R}$. Il en résulte que
$$\forall y \in \mathbb{R}, (P_n - Q)(y) = 0.$$
Mais le seul polynôme sur $\mathbb{R}$ est le polynôme nul. Donc $P_n - Q = 0$. Autrement dit, $\boxed{P_n = Q}$.
8. Calculons P_4 et P_5. On a
$$P_4 = 16X + 40X^3 + 24X^5, P_5 = 16 + 136X^2 + 240X^4 + 120X^6$$
Or $\tan^{(5)}(0) = P_5(\tan(0)) = P_5(0) = 16$. D'où $\boxed{\tan^{(5)}(0) = 16}$.

Dans la suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $a_{n,k}$ est le coefficient de degré k du polynôme P_n. Ainsi, on a

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} X^k.$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^{n+1} a_{n,k} X^k, P_n'(X) = \sum_{k=1}^{n+1} a_{n,k}(k) X^{k-1}.$$

En effectuant le changement de variable $l = k-1$, on a donc $P_n'(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k+1}(k+1)X^k$. D'où

$$(1+X^2)P_n'(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k+1}(k+1)X^k + \sum_{k=0}^{n} a_{n,k+1}(k+1)X^{k+2}$$

D'où en réindexant la deuxième somme,

$$(1+X^2)P_n'(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n,k+1}(k+1)X^k + \sum_{k=2}^{n+2} a_{n,k-1}(k-1)X^k$$

En regroupant, on a donc

$$(1+X^2)P_n'(X) = a_{n,1} + a_{n,2}2X + \sum_{k=2}^{n} (a_{n,k+1}(k+1) + a_{n,k-1}(k-1))X^k + a_{n,n}nX^{n+1} + a_{n,n+1}(n+1)X^{n+2}.$$

Par unicité de l'écriture d'un polynôme sous la forme $\sum b_k X^k$, on en déduit que

$$a_{n+1,0} = a_{n,1} + 0 = 1 \cdot a_{n,1} + (-1) \cdot a_{n,-1}$$

$$a_{n+1,1} = 2a_{n,2} = 2a_{n,2} + 0 \cdot a_{n,0}$$

$$\forall k \in \{2, \cdots, n\}, a_{n+1,k} = (k-1)a_{n,k-1} + (k+1)a_{n,k+1}$$

$$a_{n+1,n+1} = na_{n,n} + (n+2) \cdot 0 = na_{n,n} + (n+2)a_{n,n+2}$$

$$a_{n+1,n+2} = (n+1)a_{n,n+1} + (n+3) \cdot 0 = (n+1)a_{n,n+1} + (n+3)a_{n,n+3}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1,k} = (k-1)a_{n,k-1} + (k+1)a_{n,k+1}.$$

avec comme convention $a_{n,-1} = 0$, $a_{n,k} = 0$ si $k > n+1$.

10. (info) Écrire une fonction `matrice(n)` qui prend en argument un entier naturel n et qui renvoie une matrice A tel que :

$$\forall i \in \{0, \cdots, n\}, \forall j \in \{0, \cdots, n+1\}, A[i][j] = a_{i,j}.$$

```
import numpy as np
def matrice(n) :
    A=np.zeros((n+1,n+2))
    A[0][1]=1
    for i in range(1,n+1) :
        for j in range(n+2) :
            if 0<=j-1 :
                A[i][j]=A[i][j]+(j-1)*A[i-1][j-1]
            if j+1<n+2 :
                A[i][j]=A[i][j]+(j+1)*A[i-1][j+1]
    return A
```

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, une permutation signée de taille n est une liste L d'entiers de longueur n vérifiant les propriétés suivantes :

— L est une liste sans répétition,

— L contient uniquement les entiers de $B_n = \{-n, -n+1, \cdots, -2, -1, 1, 2, \cdots, n\}$,

— pour tout $k \in B_n$ et L une permutation signée de taille n, si k est un élément de L alors $-k$ n'est pas un élément de L.

On note $\mathfrak{S}_n^{\pm}$ l'ensemble des permutations signées de taille n. Étant donnée une permutation signée L de taille n, le nombre de changements de signe dans L, noté $\mathrm{cs}(L)$ est défini par $\mathrm{Card}\{i \in \{0, \cdots, n-2\} | L[i]L[i+1] < 0\}$.

On a par exemple, $\mathfrak{S}_1^{\pm} = \{[-1], [1]\}$.

1. Décrire l'ensemble $\mathfrak{S}_2^{\pm}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner le cardinal de $\mathfrak{S}_n^{\pm}$.
2. Pour $L = [4, -1, 3, -2]$, déterminer $\mathrm{cs}(L)$.
3. (info) Écrire une fonction `est_permut_signee(L)` qui prend en argument une liste L et qui renvoie `True` si L représente une permutation signée de $\mathfrak{S}_{len(L)}^{\pm}$ et `False` sinon.
4. (info) Écrire une fonction `chgt_signe(L)` qui prend en argument une permutation signée L et qui renvoie $\mathrm{cs}(L)$.

On dit qu'une permutation signée L de taille n est un serpent si : $L[0] < L[1] > L[2] \cdots L[n-1]$.
Ainsi, pour tout $i \in \{0, \cdots, n-2\}$, $L[i] > L[i+1]$ si i est impair et $L[i] < L[i+1]$ sinon.

5. Déterminer tous les serpents de taille 3.
6. (info) Écrire une fonction `est_serpent(L)` qui prend en argument une liste qui représente une permutation signée et qui renvoie `True` si L est un serpent et `False` sinon.
7. Soit $n \geq 1$. Déterminer le nombre de serpents L de $\mathfrak{S}_n^{\pm}$ tels que $\mathrm{cs}(L) = n-1$.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, une permutation signée de taille n est une liste L d'entiers de longueur n vérifiant les propriétés suivantes :

— L est une liste sans répétition,

— L contient uniquement les entiers de $B_n = \{-n, -n+1, \cdots, -2, -1, 1, 2, \cdots, n\}$,

— pour tout $k \in B_n$ et L une permutation signée de taille n, si k est un élément de L alors $-k$ n'est pas un élément de B_n.

On note $\mathfrak{S}_n^{\pm}$ l'ensemble des permutations signées de taille n. Étant donnée une permutation signée L de taille n, le nombre de changements de signe dans L, noté $\mathrm{cs}(L)$ est défini par $\mathrm{Card}\{i \in \{0, \cdots, n-2\} | L[i]L[i+1] < 0\}$.

On a par exemple, $\mathfrak{S}_1^{\pm} = \{[-1], [1]\}$.

1. On a
$$\mathfrak{S}_2^{\pm} = \{[-1, -2], [-1, 2], [1, 2], [1, -2], [2, 1], [2, -1], [-2, 1], [-2, -1]\}.$$
Construisons une bijection entre $\phi : \{-1, 1\}^n \times \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n^{\pm}$. Pour tout $(a_1, \cdots, a_n) \times (\sigma_1, \cdots, \sigma_n) \in \{-1, 1\}^n \times \mathfrak{S}_n$, on pose
$$\phi((a_1, \cdots, a_n) \times (\sigma_1, \cdots, \sigma_n)) = (a_1 \cdot \sigma_1, \cdots, a_n \cdot \sigma_n).$$
La réciproque de ϕ est alors donnée par
$$\forall (s_1, \cdots, s_n) \in \mathfrak{S}_n^{\pm}, \phi^{-1}(s_1, \cdots, s_n) = (\mathrm{signe}(s_1), \cdots, \mathrm{signe}(s_n)) \times (|s_1|, \cdots, |s_n|),$$
où $\mathrm{signe}(a) = 1$ si $a > 0$ et -1 sinon. Par exemple, on a
$$\phi((-1, 1, -1, 1) \times (2, 3, 1, 4)) = (-2, 3, -1, 4), \phi^{-1}((-3, 2, -1, -4)) = (-1, 1, -1, 1) \times (3, 2, 1, 4).$$
Il en résulte que $\mathfrak{S}_n^{\pm}$ et $\{-1, 1\}^n \times \mathfrak{S}_n$ ont le même cardinal, c'est-à-dire $\boxed{2^n n!}$.
2. Pour $L = [4, -1, 3, -2]$, $\mathrm{cs}(L) = 3$.
3.
```
def est_permutation_signee(L) :
    A=[0 for i in range(len(L)+1)]
    for i in range(len(L)) :
        A[abs(L[i])]=1
    for j in range(1,len(A)) :
        if A[j]==0 :
            return False
    return True
```

4.
```
def chgmt_signe(L) :
  s=0
  for i in range(len(L)-1) :
      if L[i]*L[i+1]<0 :
          s=s+1
  return s
```

5. Voici l'ensemble des serpents de taille 3 :

$$\left\{\begin{array}{c}[1,3,2],[1,3,-2],[1,2,-3],[2,3,1],[2,3,-1],[-1,2,-3],[-1,3,-2],[-1,3,2],\\ \\ [-2,-1,-3],[-2,1,-3],[-2,3,1],[-2,3,-1],[-3,-1,-2],[-3,1,-2],[-3,2,1],[-3,2,-1]\end{array}\right\}$$

6.
```
def est_serpent(L) :
  for i in range(len(L)-1) :
      if i%2==0 and L[i]>L[i+1] :
          return False
      elif i%2==1 and L[i]<L[i+1] :
          return False
  return True
```

7. Soit L un serpent de $\mathfrak{S}_n^{\pm}$. L étant un serpent, par définition :

$$L[0] < L[1] > L[2]...L[n-1].$$

Par définition, L a exactement $n-1$ changements de signe. Cela impose que

$$L[0] < 0, L[1] > 0, L[2] < 0..$$

Ainsi, pour tout i pair, $L[i] < 0$ et pour tout i impair, $L[i] > 0$. Ainsi, $[|L[0]|, |L[1]|, \cdots, |L[n-1]|]$ est une permutation de taille n. Réciproquement, étant donnée une permutation $[s_0, \cdots, s_{n-1}]$ de taille n on construit un serpent de la façon suivante $[-s_0, s_1, -s_2, \cdots, (-1)^n s_{n-1}]$. Ces deux constructions étant inverse l'une de l'autre, on en déduit que le nombre de serpents ayant $n-1$ changements de signe est égal au nombre de permutations de taille n c'est-à-dire $\boxed{n!}$.