DS 6 mathématiques

BCPST 1 2018-2019

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Problème 1 : un jeu télévisé

Introduction

Toto décide de participer au jeu télévisé “C’est le dernier 0 !” qui se déroule de la façon suivante :

1. N urnes ($N \in \mathbb{N}^\star$) numérotées de 1 à N sont placées devant le candidat.
2. Pour tout $i \in [|1, N|]$, l’urne i contient exactement i boules, numérotées respectivement $0, 1, 2, \cdots, i-1$. Par exemple, l’urne 1 contient uniquement une boule numérotée 0 et l’urne 2 contient deux boules numérotées respectivement 0 et 1.
3. Le candidat tire d’abord une boule dans l’urne 1 puis une boule dans l’urne 2, puis une dans l’urne 3 etc. Dès qu’il tombe sur un 0, on lui demande s’il pense que ce sera le dernier 0 qu’il aura tiré. Deux cas se présentent alors :
   - s’il considère que ce sera le dernier 0, il affirme alors que “c’est le dernier 0” et termine de tirer les boules des urnes suivantes. Si dans ces tirages il n’y a pas eu d’autre 0 alors le candidat gagne une mallette pleine de billets verts. Sinon, il repart les mains vides.
   - Ou bien il considère que ce ne sera pas le dernier 0 qu’il trouve, et dans ce cas il affirme qu’“il y aura d’autre 0”, continue ses tirages jusqu’au prochain 0 (si celui-ci existe) et on lui demande de nouveau si c’est le dernier 0. S’il n’y en n’a pas eu, il repart les mains vides.

Par exemple, pour $N = 4$, si un candidat tire successivement $0, 1, 0, 2$, il y a eu plusieurs déroulements possibles :

- cas 1 : pour le premier 0, le candidat a affirmé que c’est le dernier 0. Il a alors perdu.
- cas 2 : pour le deuxième 0, le candidat a affirmé que c’est le dernier 0. Il a alors gagné.
- cas 3 : pour le deuxième 0, le candidat a affirmé qu’il y aura d’autre 0. Il a alors perdu.

L’objectif du problème est de trouver une stratégie optimisant les chances de gagner de Toto.

Dans la suite, $\Omega_N = \{0\} \times \{0, 1\} \times \cdots \times \{0, 1, \cdots, N-1\}$ désigne l’ensemble des tirages possibles. Par exemple, $\Omega_2 = \{0\} \times \{0, 1\}$ est exactement l’ensemble $\{(0, 0), (0, 1)\}$, la 3-liste $(0, 1, 0)$ est un élément de Ω_3 et la 5-liste $(0, 0, 2, 3, 1)$ est un élément de Ω_5.

Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$ et $i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$, $(T_k = i)$ désigne l’événement “la boule i a été tirée dans l’urne k” et D_k désigne l’événement “la boule 0 a été tirée dans l’urne k et c’est le dernier 0”.

On suppose que les tirages sont indépendants dans leur ensemble et

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, N\}, \forall i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}, P(T_k = i) = \frac{1}{k}.$$

Calculs préliminaires

1. Décrire tous les éléments de Ω_3.
2. Soit $N \geq 1$. Déterminer le cardinal de Ω_N.
3. Soit $N \geq 1$. Montrer que pour tout $(a_1, a_2, \cdots, a_N) \in \Omega_N$, $P\left((T_1 = a_1) \cap (T_2 = a_2) \cap \cdots \cap (T_N = a_N)\right) = \frac{1}{N!}$.
   Ainsi, Ω_N est muni de la probabilité uniforme.
4. **(INFO)** Écrire une fonction `tirage(N)` qui prend en argument un entier $N \geq 1$ et qui renvoie un élément de Ω_N de façon aléatoire et uniforme.
5. Soit $N \geq 1$. Déterminer la probabilité de gagner si on affirme que le premier 0 tiré est le dernier.

6. Soient $N \geq 1$ et $k \in \{1, \cdots, N\}$.
   (a) Montrer que $P(D_k|(T_k = 0)) = \prod_{j=k+1}^{N}(1 - \frac{1}{j})$.
   (b) En déduire que $P(D_k|(T_k = 0)) = \frac{k}{N}$.
   (c) Exprimer $P(D_k)$ en fonction de N.
7. Soit $N \geq 1$. Pour tout $(k, \ell) \in \{1, \cdots, N\}^2$, on pose
   — A_k l'événement " après le k^{e} tirage (exclus), il y a exactement un 0",
   — $B_{k,\ell} = \cap_{i=k+1}^{\ell-1}\overline{(T_i = 0)}$. Autrement dit, $B_{k,\ell}$ est l'événement "il n'y a pas de zéro entre le k^{e} tirage (exclus) et ℓ^{e} tirage (exclus)". Par convention, si $k \geq \ell - 1$, $B_{k,\ell}$ est l'événement certain Ω_N.
   (a) Soit $(k, \ell) \in \{1, 2 \cdots, N\}^2, k < \ell - 1$. Montrer que $P(B_{k,\ell}) = \frac{k}{\ell-1}$.
   (b) Soit $k \in \{1, 2, \cdots, N - 1\}$.
      i. Montrer que : $A_k = \displaystyle\bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell})$.
      ii. En déduire que : $P(A_k) = P(A_k|T_k = 0) = \dfrac{k}{N}\left(\displaystyle\sum_{\ell=k+1}^{N} \frac{1}{(\ell - 1)}\right)$.

Étude d'une stratégie

Toto décide d'opter pour la stratégie $\mathcal{S}$ suivante : au k^{e} tirage, si l'on a obtenu un 0, on compare $P(A_k|T_k = 0)$ et $P(D_k|T_k = 0)$. Si $P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0)$, on annonce que c'est le dernier 0. Sinon, on effectue le même raisonnement au prochain 0.

Dans la suite, pour tout $N \geq 1$, on note k_N le plus petit entier k strictement positif vérifiant

$$P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0).$$

Ainsi, la stratégie décrite consiste à affirmer que le premier 0 tiré à partir du ${k_N}^{\text{e}}$ tirage est le dernier. On remarque et on admet alors que l'événement G_N "le candidat gagne à l'aide de la stratégie $\mathcal{S}$" est égal à l'événement A_{k_N-1}.

8. Soient $N \geq 3, k \in \{1, 2, \cdots, N - 1\}$. Montrer que : $(P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0)) \Leftrightarrow \left(\displaystyle\sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} < 1\right)$.
9. Calculer k_3, k_4.
10. **(INFO)** Écrire une fonction `arrete(N)` qui prend en argument un entier $N \geq 2$ et qui renvoie k_N.
11. Dans les questions suivantes, on veut démontrer que :

$$\forall N \geq 3, \forall k \in \{2, 3, \cdots, N - 1\}, \ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right).$$

   Soient $N \geq 3, \ell \in \{2, 3, \cdots, N - 1\}$.
   (a) Montrer que : $\forall x \in [\ell, \ell + 1], \dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\ell} \leq \dfrac{1}{x-1}$.
   (b) À l'aide du calcul intégral, montrer que $\ln(\ell + 1) - \ln(\ell) \leq \dfrac{1}{\ell} \leq \ln(\ell) - \ln(\ell - 1)$.
12. Soient $N \geq 3$, $k \in \{2, 3, \cdots, N - 1\}$. Déduire des calculs précédents que

$$\ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right)$$

13. Soit $N \geq 5$. Montrer que $\ln(\frac{N}{k_N}) < 1$ et que $1 \leq \ln(\frac{N}{k_N-2})$.
14. Montrer que pour tout $N \geq 5, k_N > \frac{N}{e}$. En déduire la limite de la suite $(k_N)_{N\geq 5}$.
15. Montrer que la suite $(\frac{k_N}{N})_{N\geq 5}$ est convergente et déterminer sa limite.
16. À l'aide des questions précédentes, montrer que la suite $(P(G_N))_{N\geq 5}$ est convergente et déterminer sa limite.
17. En déduire que pour tout N assez grand, en adoptant la stratégie $\mathcal{S}$, Toto a plus d'une chance sur trois de gagner. On rappelle que $e < 3$.

DS n$^{\text{o}}$ 6 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Problème 2 (Un polynôme non télévisé)

On considère le polynôme $P_t = 4X^5 + 5tX^4 - 4$ où $t \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. **(Informatique)** Écrire une fonction `polynome(t,x)` qui prend en arguments une valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ et un réel $x \in \mathbb{R}$ puis qui renvoie la valeur de $P_t(x)$.
2. Pour cette question, on fixe $t \in \mathbb{R}$.
   (a) Factoriser le polynôme dérivé P'_t dans $\mathbb{C}[X]$. Quelles sont ses racines et leur multiplicité ?
   (b) En déduire que P_t admet cinq racines simples dans $\mathbb{C}$ si $t \neq 4^{1/5}$.
3. Déterminer le nombre de racines de P_t dans $\mathbb{C}$ et leur multiplicité dans le cas où $t = 4^{1/5}$.
4. Pour cette question, on fixe $t > 0$.
   (a) Dresser le tableau des variations de la fonction $x \mapsto P_t(x)$.
   (b) En déduire le nombre de racines de P_t dans $\mathbb{R}$ en distinguant plusieurs cas.

Pour la suite de l'énoncé, on note $r(t)$ l'unique racine réelle positive de P_t pour tout $t > 0$.

5. Justifier que $r(t) \in]0, 1[$ pour tout $t > 0$.
6. **(Informatique)**
   (a) En utilisant la fonction `polynome`, écrire une fonction `dichotomie1(t,n)` qui prend en arguments une valeur du paramètre $t > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ puis qui renvoie, à l'aide d'un algorithme de dichotomie, le n-ième terme d'une suite qui converge vers $r(t)$.
   (b) Écrire une fonction `approximation1(t,epsilon)` qui prend en arguments une valeur du paramètre $t > 0$ et une précision $\varepsilon > 0$ puis qui renvoie une valeur approchée de $r(t)$ à ε près.
7. (a) On fixe $t_2 > t_1 > 0$ dans cette question. Déterminer le signe de $P_{t_1}(r(t_2))$.
   (b) En déduire la monotonie de la fonction $r : t \mapsto r(t)$ sur $]0, +\infty[$.
8. (a) Justifier que r se prolonge par continuité en 0.
   (b) On note encore r le prolongement obtenu. Déterminer $r(0)$.
   (c) Montrer que $r(t) - 1$ est équivalent à $-t/4$ quand t tend vers 0.
9. (a) Justifier que $\ell = \lim_{t \to +\infty} r(t)$ existe et est finie.
   (b) Montrer que $\ell > 0$ est absurde. En déduire la valeur de ℓ.
   (c) Montrer que $r(t)$ est équivalent à $(4/(5t))^{1/4}$ quand t tend vers $+\infty$.
10. On pose la fonction $f : x \mapsto 4(1 - x^5)/(5x^4)$.
   (a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1]$ vers un intervalle à déterminer.
   (b) Justifier que r est la bijection réciproque de f et en déduire que r est continue sur $[0, +\infty[$.

11. (a) Justifier que P_t admet également une unique racine réelle positive pour tout $t < 0$.
On note encore $r(t)$ cette racine pour tout $t < 0$.

(b) **(Informatique)** On considère la fonction `mystere` suivante.

```
def mystere(t):
    k=0
    while polynome(t,k)<=0:
        k=k+1
    return k
```

i. Expliquer ce que renvoie la fonction `mystere`.

ii. À l'aide de la fonction `mystere`, écrire une fonction `dichotomie2(t,n)` et une fonction `approximation2(t,epsilon)` similaires à celles des questions 6(a) et 6(b) mais qui prennent en argument une valeur du paramètre $t < 0$.

(c) À l'aide de la fonction f définie à la question 10, montrer que r est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis déterminer $\lim_{t\to-\infty} r(t)$ et un équivalent simple de $r(t)$ quand $t \to -\infty$.