DS 6 mathématiques

BCPST 1 2018-2019

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Problème 1 : un jeu télévisé

Introduction

Toto décide de participer au jeu télévisé “C’est le dernier 0 !” qui se déroule de la façon suivante :

1. N urnes ($N \in \mathbb{N}^\star$) numérotées de 1 à N sont placées devant le candidat.
2. Pour tout $i \in [|1, N|]$, l’urne i contient exactement i boules, numérotées respectivement $0, 1, 2, \cdots, i-1$. Par exemple, l’urne 1 contient uniquement une boule numérotée 0 et l’urne 2 contient deux boules numérotées respectivement 0 et 1.
3. Le candidat tire d’abord une boule dans l’urne 1 puis une boule dans l’urne 2, puis une dans l’urne 3 etc. Dès qu’il tombe sur un 0, on lui demande s’il pense que ce sera le dernier 0 qu’il aura tiré. Deux cas se présentent alors :
   - s’il considère que ce sera le dernier 0, il affirme alors que “c’est le dernier 0” et termine de tirer les boules des urnes suivantes. Si dans ces tirages il n’y a pas eu d’autre 0 alors le candidat gagne une mallette pleine de billets verts. Sinon, il repart les mains vides.
   - Ou bien il considère que ce ne sera pas le dernier 0 qu’il trouve, et dans ce cas il affirme qu’“il y aura d’autre 0”, continue ses tirages jusqu’au prochain 0 (si celui-ci existe) et on lui demande de nouveau si c’est le dernier 0. S’il n’y en n’a pas eu, il repart les mains vides.

Par exemple, pour $N = 4$, si un candidat tire successivement $0, 1, 0, 2$, il y a eu plusieurs déroulements possibles :

- cas 1 : pour le premier 0, le candidat a affirmé que c’est le dernier 0. Il a alors perdu.
- cas 2 : pour le deuxième 0, le candidat a affirmé que c’est le dernier 0. Il a alors gagné.
- cas 3 : pour le deuxième 0, le candidat a affirmé qu’il y aura d’autre 0. Il a alors perdu.

L’objectif du problème est de trouver une stratégie optimisant les chances de gagner de Toto.

Dans la suite, $\Omega_N = \{0\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0, 1, \cdots, N-1\}$ désigne l’ensemble des tirages possibles. Par exemple, $\Omega_2 = \{0\} \times \{0, 1\}$ est exactement l’ensemble $\{(0, 0), (0, 1)\}$, la 3-liste $(0, 1, 0)$ est un élément de Ω_3 et la 5-liste $(0, 0, 2, 3, 1)$ est un élément de Ω_5.

Pour tout $k \in \{1, 2, \cdots, N\}$ et $i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$, $(T_k = i)$ désigne l’événement “la boule i a été tirée dans l’urne k” et D_k désigne l’événement “la boule 0 a été tirée dans l’urne k et c’est le dernier 0”.

On suppose que les tirages sont indépendants dans leur ensemble et

$$\forall k \in \{1, 2, \cdots, N\}, \forall i \in \{0, 1, \cdots, k-1\}, P(T_k = i) = \frac{1}{k}.$$

Calculs préliminaires

1. Décrire tous les éléments de Ω_3.
2. Soit $N \geq 1$. Déterminer le cardinal de Ω_N.
3. Soit $N \geq 1$. Montrer que pour tout $(a_1, a_2, \cdots, a_N) \in \Omega_N$, $P\left((T_1 = a_1) \cap (T_2 = a_2) \cap \cdots \cap (T_N = a_N)\right) = \frac{1}{N!}$. Ainsi, Ω_N est muni de la probabilité uniforme.
4. **(INFO)** Écrire une fonction `tirage(N)` qui prend en argument un entier $N \geq 1$ et qui renvoie un élément de Ω_N de façon aléatoire et uniforme.
5. Soit $N \geq 1$. Déterminer la probabilité de gagner si on affirme que le premier 0 tiré est le dernier.

6. Soient $N \geq 1$ et $k \in \{1, \cdots, N\}$.
   (a) Montrer que $P(D_k|(T_k = 0)) = \prod_{j=k+1}^{N}(1 - \frac{1}{j})$.
   (b) En déduire que $P(D_k|(T_k = 0)) = \frac{k}{N}$.
   (c) Exprimer $P(D_k)$ en fonction de N.
7. Soit $N \geq 1$. Pour tout $(k, \ell) \in \{1, \cdots, N\}^2$, on pose
   — A_k l'événement " après le k^e tirage (exclus), il y a exactement un 0",
   — $B_{k,\ell} = \cap_{i=k+1}^{\ell-1}\overline{(T_i = 0)}$. Autrement dit, $B_{k,\ell}$ est l'événement "il n'y a pas de zéro entre le k^e tirage (exclus) et ℓ^e tirage (exclus)". Par convention, si $k \geq \ell - 1$, $B_{k,\ell}$ est l'événement certain Ω_N.

   (a) Soit $(k, \ell) \in \{1, 2 \cdots, N\}^2, k < \ell - 1$. Montrer que $P(B_{k,\ell}) = \frac{k}{\ell-1}$.
   (b) Soit $k \in \{1, 2, \cdots, N - 1\}$.
      i. Montrer que : $A_k = \displaystyle\bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell})$.
      ii. En déduire que : $P(A_k) = P(A_k|T_k = 0) = \dfrac{k}{N}\left(\displaystyle\sum_{\ell=k+1}^{N} \frac{1}{(\ell-1)}\right)$.

Correction

1. Par définition, $\Omega_3 = \{0\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1, 2\}$. Ces éléments sont donc exactement :
$$\boxed{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2).}$$
2. Soit $N \geq 1$. Par définition $\Omega_N = \{0\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1, 2, \cdots, N - 1\}$. Donc
$$\text{Card}(\Omega_N) = \prod_{i=1}^{N} \text{Card}(\{0, 1, \cdots, i - 1\}).$$
   D'où
$$\text{Card}(\Omega_N) = \prod_{i=1}^{N} i.$$
   Donc $\boxed{\text{Card}(\Omega_N) = N!.}$
3. Soit $(a_1, a_2, \cdots, a_N) \in \Omega_N$. Par hypothèse, les tirages étant indépendants dans leur ensemble, on en déduit que
$$P((T_1 = a_1) \cap (T_2 = a_2) \cap \cdots \cap (T_N = a_N)) = \prod_{k=1}^{N} P(T_k = a_k).$$
   De plus, pour tout $(k, i) \in \{1, 2, \cdots, N\} \times \{0, 1, \cdots, k - 1\}, P(T_k = i) = \frac{1}{k}$. D'où
$$P((T_1 = a_1) \cap (T_2 = a_2) \cap \cdots \cap (T_N = a_N)) = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$
   Autrement dit,
$$\boxed{P((T_1 = a_1) \cap (T_2 = a_2) \cap \cdots \cap (T_N = a_N)) = \frac{1}{N!}}.$$
4. **(INFO)**

```
import random as rd
def tirage(N) :
    if N>=1 :
        L=[]
        for k in range(N) :
            a=rd.randint(0,k)
            L.append(a)
        return L
```

5. Soit $N \geq 1$. Notons A l'événement “le candidat gagne en affirmant que le premier 0 est le dernier”. A est alors l'ensemble des tirages où le seul 0 est le premier. Donc $A = \{0\} \times \{1\} \times \{1,2\} \times \cdots \times \{1,2,\cdots,N-1\}$. Ω_N étant muni de la probabilité uniforme, on en déduit que

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega_N)}.$$

Mais $\mathrm{Card}(A) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (N-1) = (N-1)!$. D'où

$$P(A) = \frac{(N-1)!}{N!}.$$

Par conséquent,

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{N}.}$$

6. Soient $N \geq 1$ et $k \in \{1, \cdots, N\}$.

(a) Par définition, D_k est exactement l'événement $(T_k = 0) \cap \left(\cap_{i=k+1}^N \overline{(T_i = 0)}\right)$. Donc

$$\begin{aligned} P(D_k|(T_k = 0)) &= \tfrac{P(D_k \cap (T_k=0)}{P(T_k=0)} \\ &= \tfrac{P(D_k)}{P(T_k=0)} \qquad \text{car } D_k \subset (T_k = 0). \end{aligned}$$

Les tirages étant indépendants dans leur ensemble, il en résulte que

$$\begin{aligned} P(D_k|(T_k = 0)) &= \tfrac{P(T_k=0)\prod_{i=k+1}^N P(\overline{(T_i=0)})}{P(T_k=0)} \\ &= \textstyle\prod_{i=k+1}^N P(\overline{(T_i = 0)}) \\ &= \textstyle\prod_{i=k+1}^N (1 - P(T_i = 0)) \\ &= \textstyle\prod_{i=k+1}^N (1 - \frac{1}{i}) \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{P(D_k|(T_k = 0)) = \prod_{i=k+1}^{N} (1 - \frac{1}{i}).}$$

(b) On a

$$\begin{aligned} P(D_k|(T_k = 0)) &= \textstyle\prod_{i=k+1}^N (1 - \frac{1}{i}), && \text{D'après la question 6.a,} \\ &= \textstyle\prod_{i=k+1}^N \frac{i-1}{i} \\ &= \tfrac{k}{k+1}\tfrac{k+1}{k+2} \cdots \tfrac{i-1}{i} \cdots \tfrac{N-1}{N} \\ &= \tfrac{k}{\cancel{k+1}}\tfrac{\cancel{k+1}}{\cancel{k+2}} \cdots \tfrac{\cancel{i-1}}{\cancel{i}} \cdots \tfrac{\cancel{N-1}}{N} && \text{Par télescopage} \\ &= \underline{\tfrac{k}{N}}. \end{aligned}$$

(c) L'événement D_k étant inclus dans $(T_k = 0)$, on en déduit que

$$\begin{aligned} P(D_k) &= P((T_k = 0) \cap D_k) \\ &= P(T_k = 0)P(D_k|T_k = 0) \\ &= \tfrac{1}{k}\tfrac{k}{N} && \text{les différents tirages étant équiprobable et d'après la question 6.c} \\ &= \underline{\tfrac{1}{N}}. \end{aligned}$$

7. Soit $N \geq 1$.

(a) Soit $(k, \ell) \in \{1, 2 \cdots, N\}^2, k < \ell - 1$. On a

$$\begin{aligned}
P(B_{k,\ell}) &= P(\cap_{i=k+1}^{\ell-1} \overline{(T_i = 0)}) \\
&= \prod_{i=k+1}^{\ell-1} P(\overline{T_i = 0}), \qquad \text{les événements étant indépendants dans leur ensemble} \\
&= \prod_{i=k+1}^{\ell-1} (1 - P(T_i = 0)) \\
&= \prod_{i=k+1}^{\ell-1} (1 - \tfrac{1}{i}) \\
&= \prod_{i=k+1}^{\ell-1} \tfrac{i-1}{i} \\
&= \tfrac{k(k+1)\cdots(\ell-2}{(k+1)(k+2)\cdots(\ell-1)} \\
&= \underline{\tfrac{k}{\ell-1}} \qquad \text{en simplifiant.}
\end{aligned}$$

(b) Soit $k \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$.

i. Montrons que : $A_k = \displaystyle\bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell})$ par double inclusion.

— Soit $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N) \in A_k$. Notons k_0 l'indice du dernier 0. Par définition de k_0, ω_{k_0} est le dernier 0. Donc $\omega \in D_{k_0}$. De plus, par définition de A_k, ω_{k_0} est le seul 0 obtenu à partir du rang $k+1$. Donc $\omega \in B_{k,k_0}$. Par conséquent, $\omega \in D_{k_0} \cap B_{k,k_0}$. D'où

$$\omega \in \bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell}).$$

On a bien

$$\underline{A_k \subset \bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell}).}$$

— Soit $\omega = (\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_N) \in \bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell})$. Il existe donc $k_0 \in \{k+1, \cdots, N\}$ tel que ω est un élément de $(D_{k_0} \cap B_{k,k_0})$. Donc l'unique 0 obtenu après le rang k (exclus) est ω_{k_0}. Donc ω est bien un élément de A_k. D'où

$$\underline{\bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell}) \subset A_k.}$$

— D'après le principe de double inclusion,

$$\boxed{\bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell}) = A_k.}$$

ii. D'après la question 7.b.i, $\bigcup_{\ell=k+1}^{N} (D_\ell \cap B_{k,\ell}) = A_k$. Les événements $(D_\ell \cap B_{k,\ell})_{k+1 \leq \ell \leq N}$ étant deux à deux incompatibles, on en déduit que

$$P(A_k) = \sum_{\ell=k+1}^{N} P(D_\ell \cap B_{k,\ell}).$$

Or pour tout $\ell \in \{k+1, \cdots, N\}$, $D_\ell = (T_\ell = 0) \cap (\cap_{i=\ell+1}^{N} \overline{(T_i = 0)})$ et $B_{k,\ell} = \cap_{i=k+1}^{\ell-1} \overline{(T_i = 0)}$. Les tirages étant indépendants dans leur ensemble, ces deux événements sont donc indépendants. D'où

$$P(A_k) = \sum_{\ell=k+1}^{N} P(D_\ell) P(B_{k,\ell}).$$

En remplaçant par leur valeur,

$$P(A_k) = \sum_{\ell=k+1}^{N} \frac{1}{N}\frac{k}{\ell-1}.$$

D'où

$$\boxed{P(A_k) = \frac{k}{N}\left(\sum_{\ell=k+1}^{N} \frac{1}{\ell-1}\right).}$$

L'événement A_k étant indépendant de $(T_k = 0)$, on en déduit que

$$P(A_k|T_k = 0) = P(A_k).$$

D'où

$$\boxed{P(A_k|T_k = 0) = \frac{k}{N}\left(\sum_{\ell=k+1}^{N} \frac{1}{\ell-1}\right).}$$

Étude d'une stratégie

Toto décide d'opter pour la stratégie $\mathcal{S}$ suivante : au k^{e} tirage, si l'on a obtenu un 0, on compare $P(A_k|T_k = 0)$ et $P(D_k|T_k = 0)$. Si $P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0)$, on annonce que c'est le dernier 0. Sinon, on effectue le même raisonnement au prochain 0.

Dans la suite, pour tout $N \geq 1$, on note k_N le plus petit entier k strictement positif vérifiant

$$P(A_k|T_k = 0) < P(D_k|T_k = 0).$$

Ainsi, la stratégie décrite consiste à affirmer que le premier 0 tiré à partir du ${k_N}^{\text{e}}$ tirage est le dernier. On remarque et on admet alors que l'événement G_N “le candidat gagne à l'aide de la stratégie $\mathcal{S}$” est égal à l'événement A_{k_N-1}.

8. Soient $N \geq 3, k \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$. Montrer que : $\left(P\left(A_k|T_k = 0\right) < P\left(D_k|T_k = 0\right)\right) \Leftrightarrow \left(\sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} < 1\right)$.
9. Calculer k_3, k_4.
10. **(INFO)** Écrire une fonction `arrete(N)` qui prend en argument un entier $N \geq 2$ et qui renvoie k_N.
11. Dans les questions suivantes, on veut démontrer que :

$$\forall N \geq 3, \forall k \in \{2, 3, \cdots, N-1\}, \ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right).$$

Soient $N \geq 3, \ell \in \{2, 3, \cdots, N-1\}$.

   (a) Montrer que : $\forall x \in [\ell, \ell+1], \frac{1}{x} \leq \frac{1}{\ell} \leq \frac{1}{x-1}$.

   (b) À l'aide du calcul intégral, montrer que $\ln(\ell+1) - \ln(\ell) \leq \frac{1}{\ell} \leq \ln(\ell) - \ln(\ell-1)$.
12. Soient $N \geq 3$, $k \in \{2, 3, \cdots, N-1\}$. Déduire des calculs précédents que

$$\ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right)$$

13. Soit $N \geq 5$. Montrer que $\ln(\frac{N}{k_N}) < 1$ et que $1 \leq \ln(\frac{N}{k_N-2})$.
14. Montrer que pour tout $N \geq 5, k_N > \frac{N}{e}$. En déduire la limite de la suite $(k_N)_{N\geq 5}$.
15. Montrer que la suite $(\frac{k_N}{N})_{N\geq 5}$ est convergente et déterminer sa limite.
16. À l'aide des questions précédentes, montrer que la suite $(P(G_N))_{N\geq 5}$ est convergente et déterminer sa limite.
17. En déduire que pour tout N assez grand, en adoptant la stratégie $\mathcal{S}$, Toto a plus d'une chance sur trois de gagner. On rappelle que $e < 3$.

Correction

8. Soient $N \geq 3, k \in \{1, 2, \cdots, N-1\}$.

$$\begin{aligned}(P(A_k|T_k=0) < P(D_k|T_k=0)) &\Leftrightarrow \tfrac{k}{N}\textstyle\sum_{\ell=k+1}^{N} \tfrac{1}{\ell-1} < \tfrac{k}{N} \\ &\Leftrightarrow \textstyle\sum_{\ell=k+1}^{N} \tfrac{1}{\ell-1} < 1 \qquad (\tfrac{k}{N} > 0)\end{aligned}$$

En posant $\ell' = \ell - 1$, on a alors

$$\boxed{(P(A_k|T_k=0) < P(D_k|T_k=0)) \Leftrightarrow \sum_{\ell'=k}^{N-1} \frac{1}{\ell'} < 1.}$$

9. — Calculons k_3 : $1 + \frac{1}{2} > 1$ et $\frac{1}{2} < 1$. Donc $k_3 = 2$.
   — Calculons k_4 : $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} > 1$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} < 1$. Donc $k_4 = 2$.
10.
```
def arrete(N) :
    S=0
    for i in range(N-1,0,-1) :
        S=S+(1/i)
        if S>=1 :
            return i+1
```

11. Dans les questions suivantes, on veut démontrer que :

$$\forall N \geq 3, \forall k \in \{2, 3, \cdots, N-1\}, \ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right).$$

Soient $N \geq 3, \ell \in \{2, 3, \cdots, N-1\}$.

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}x \in [\ell, \ell+1] &\Leftrightarrow (\ell \leq x \leq \ell+1) \\ &\Leftrightarrow (\ell - 1 \leq x - 1 \leq \ell) \\ &\Leftrightarrow (x - 1 \leq \ell \leq x) \\ &\Leftrightarrow \tfrac{1}{x-1} \geq \tfrac{1}{\ell} \geq \tfrac{1}{x} \qquad \text{car } x \mapsto \tfrac{1}{x} \text{ strictement décroissante sur } \mathbb{R}^{+\star},\ \ell > 0\end{aligned}$$

(b) Pour tout $x \in [\ell, \ell+1]$, on a

$$\frac{1}{x-1} \geq \frac{1}{\ell} \geq \frac{1}{x}$$

Par croissance de l'intégrale, on en déduit que

$$\int_{\ell}^{\ell+1} \frac{1}{t-1} dt \geq \int_{\ell}^{\ell+1} \frac{1}{\ell} dt \geq \int_{\ell}^{\ell+1} \frac{1}{t} dt.$$

D'où

$$\ln(\ell) - \ln(\ell-1) \geq \frac{1}{\ell} \geq \ln(\ell+1) - \ln(\ell).$$

Autrement dit,

$$\boxed{\ln(\ell+1) - \ln(\ell) \leq \frac{1}{\ell} \leq \ln(\ell) - \ln(\ell-1).}$$

12. Soient $N \geq 3$, $k \in \{2, 3, \cdots, N-1\}$. D'après la question 11.b,

$$\forall \ell \in \{k, k+1, \cdots, N-1\}, \ln(\ell+1) - \ln(\ell) \leq \frac{1}{\ell} \leq \ln(\ell) - \ln(\ell-1).$$

En sommant, on obtient

$$\sum_{\ell=k}^{N-1} (\ln(\ell+1) - \ln(\ell)) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} (\ln(\ell) - \ln(\ell-1)) \,.$$

On reconnaît des sommes télescopiques à gauche et à droite de l'inégalité. D'où

$$\ln(N) - \ln(k) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln(N-1) - \ln(k-1).$$

Autrement dit,

$$\boxed{\ln\left(\frac{N}{k}\right) \leq \sum_{\ell=k}^{N-1} \frac{1}{\ell} \leq \ln\left(\frac{N-1}{k-1}\right).}$$

13. Soit $N \geq 5$. Par définition de k_N, on a

$$\sum_{k=k_N}^{N-1} \frac{1}{k} < 1.$$

Mais d'après la question 11, $\ln(\frac{N}{k_N}) \leq \sum_{k=k_N}^{N-1} \frac{1}{k}$. D'où $\ln(\frac{N}{k_N}) < 1$. De plus,

$$\sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k} \geq 1$$

et $\sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k} \leq \ln(\frac{N-1}{k_N-1-1})$. D'où

$$1 \leq \ln(\frac{N-1}{k_N-1-1}) < \ln(\frac{N}{k_N-2}).$$

D'où

$$\boxed{\ln(\frac{N}{k_N}) < 1 < \ln(\frac{N}{k_N-2}).}$$

14. Soit $N \geq 5$. On a

$$\ln(\frac{N}{k_N}) < 1$$

La fonction exponentielle étant strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que

$$\frac{N}{k_N} < e.$$

D'où $\frac{N}{e} < k_N$. Mais $\lim_{N\to+\infty} \frac{N}{e} = +\infty$. D'où

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} k_N = +\infty.}$$

15. Soit $N \geq 5$. D'après la question 13, on a

$$\ln(\frac{N}{k_N}) < 1 < \ln(\frac{N}{k_N-2}).$$

D'où, par croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$0 < \frac{N}{k_N} < e < \frac{N}{k_N-2}.$$

Par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+\star}$:

$$\frac{k_N}{N} > e > \frac{k_N - 2}{N}$$

D'où

$$\frac{k_N}{N} > \frac{1}{e} \text{ et } \frac{1}{e} + \frac{2}{N} > \frac{k_N}{N}.$$

Autrement dit,

$$\frac{1}{e} + \frac{2}{N} > \frac{k_N}{N} > \frac{1}{e}.$$

Or $\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{e} + \frac{2}{N} = \frac{1}{e}$. D'après le théorème d'encadrement, on en déduit que

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} \frac{k_N}{N} = \frac{1}{e}.}$$

16. Soit $N \geq 5$. d'après l'énoncé, $G_N = A_{k_N-1}$. Donc, d'après la question 7.b, on a

$$P(G_N) = \frac{k_N - 1}{N} \sum_{k=k_N}^{N} \frac{1}{k-1} = \frac{k_N - 1}{N} \sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k}.$$

Or, $\ln(\frac{N}{k_N-1}) \leq \sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k} \leq \ln(\frac{N}{k_N-3})$. D'où

$$\ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{1}{k_N}}) \leq \sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k} \leq \ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{3}{k_N}})$$

D'où

$$\frac{k_N - 1}{N}\left(\ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{1}{k_N}})\right) \leq \frac{k_N-1}{N}(\sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k}) \leq \frac{k_N-1}{N}(\ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{3}{k_N}})).$$

Donc

$$(\frac{k_N}{N} - \frac{1}{N})\left(\ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{1}{k_N}})\right) \leq \frac{k_N-1}{N}(\sum_{k=k_N-1}^{N-1} \frac{1}{k}) \leq (\frac{k_N}{N} - \frac{1}{N})(\ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{3}{k_N}})).$$

Autrement dit,

$$(\frac{k_N}{N} - \frac{1}{N})\left(\ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{1}{k_N}})\right) \leq P(G_N) \leq (\frac{k_N}{N} - \frac{1}{N})(\ln(\frac{N}{k_N}) + \ln(\frac{1}{1-\frac{3}{k_N}})).$$

D'après les questions 14 et 15, $\lim_{N\to+\infty} k_N = +\infty, \lim_{N\to+\infty} \frac{k_N}{N} = \frac{1}{e}$. En appliquant les calculs usuels sur les limites et par continuité sur $\mathbb{R}^{+\star}$ de ln, on en déduit que les membres gauche et droit de l'inégalité ont comme limite $\frac{1}{e}$ lorsque $N \to +\infty$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit que $\underline{\lim_{N\to+\infty} P(G_N) = \frac{1}{e}}$.

17. D'après l'énoncé, $e < 3$. Donc $\frac{1}{e} > \frac{1}{3}$. Or $\lim_{N\to+\infty} P(G_N) = \frac{1}{e}$. On en déduit que pour N assez grand, on a alors $P(G_N) > \frac{1}{3}$. En adoptant la stratégie $\mathcal{S}$, on a bien plu d'une chance sur trois de gagner.

Corrigé du DS n° 6 de mathématiques et d'informatique

Problème 2

On considère le polynôme $P_t = 4X^5 + 5tX^4 - 4$ où $t \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. ***(Informatique)** Écrire une fonction `polynome(t,x)` qui prend en arguments une valeur du paramètre $t \in \mathbb{R}$ et un réel $x \in \mathbb{R}$ puis qui renvoie la valeur de $P_t(x)$.*

   ▶ Par exemple :

```
def polynome(t,x):
    return 4*(x**5)+5*t*(x**4)-4
```

2. *Pour cette question, on fixe $t \in \mathbb{R}$.*

   (a) *Factoriser le polynôme dérivé P_t' dans $\mathbb{C}[X]$. Quelles sont ses racines et leur multiplicité ?*

   ▶ On a :
$$P_t' = 20X^4 + 20tX^3 = \boxed{20X^3(X+t)} = 20(X-0)^3(X-(-t)).$$
   Ainsi, les racines de P_t' sont $\boxed{0 \text{ de multiplicité } 3}$ et $\boxed{-t \text{ de multiplicité } 1}$.

   (b) *En déduire que P_t admet cinq racines simples dans $\mathbb{C}$ si $t \neq 4^{1/5}$.*

   ▶ On a $P_t(0) = -4 \neq 0$ et :
$$P_t(-t) = 4(-t)^5 + 5t(-t)^4 - 4 = -4t^5 + 5t^5 - 4 = t^5 - 4.$$
   Donc :
$$P_t(-t) = 0 \iff t^5 - 4 = 0 \iff t^5 = 4 \iff t = 4^{1/5}.$$
   Ainsi, si $t \neq 4^{1/5}$, les racines de P_t' ne sont pas des racines de P_t. Par conséquent, toutes les racines de P_t sont de multiplicité 1. Puisque P_t est de degré 5, on en déduit d'après le théorème fondamental de l'algèbre que $\boxed{P_t \text{ admet cinq racines simples dans } \mathbb{C}}$.

3. *Déterminer le nombre de racines de P_t dans $\mathbb{C}$ et leur multiplicité dans le cas où $t = 4^{1/5}$.*

   ▶ Si $t = 4^{1/5}$, on a vu aux questions précédentes que $P_t'(-t) = 0$ et $P_t(-t) = 0$. Par conséquent, $-t$ est une racine de P_t de multiplicité au moins égale à 2.

   > *Attention : on n'a pas encore démontré que la multiplicité de la racine $-t$ est exactement égale à 2. La multiplicité peut être plus grande si les dérivées d'ordre supérieur de P_t s'annulent en $-t$.*

   De plus, on a :
$$P_t'' = 20 \times 4X^3 + 20t \times 3X^2 = 20X^2(4X+3t)$$
$$\text{donc} \quad P_t''(-t) = 20(-t)^2(-4t+3t) = -20t^3 = -20(4^{1/5})^3 = -20 \times 4^{3/5} \neq 0.$$
   Par conséquent, $-t$ est une racine de P_t de multiplicité exactement égale à 2. En raisonnant comme à la question précédente, on sait que toutes les autres racines de P_t sont de multiplicité 1. Puisque P_t est de degré 5, on en déduit d'après le théorème fondamental de l'algèbre que $\boxed{P_t \text{ admet quatre racines } \mathbb{C} \text{ : trois racines simples et une racine double égale à } -t = -4^{1/5}}$.

4. *Pour cette question, on fixe $t > 0$.*

   (a) *Dresser le tableau des variations de la fonction $x \mapsto P_t(x)$.*

   ▶ On a vu à la question 2(a) que :
$$x \mapsto P_t'(x) = 20x^3(x+t).$$
   Or $20 > 0$, $x^3 > 0 \iff x > 0$ et $x + t > 0 \iff x > -t$. Puisque $-t < 0$, on en déduit le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$		$-t$		0		$+\infty$
$P_t'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P_t(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	t^5-4	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

car :

- $\lim_{x\to-\infty} P_t(x) = \lim_{x\to-\infty} 4x^5 = -\infty$ à l'aide de l'équivalent $4x^5+5tx^4-4 \sim_{x\to-\infty} 4x^5$
- $P_t(-t) = t^5-4$ en reprenant le calcul de la question 2(b)
- $P_t(0) = -4$
- $\lim_{x\to+\infty} P_t(x) = \lim_{x\to+\infty} 4x^5 = +\infty$ à l'aide de l'équivalent $4x^5+5tx^4-4 \sim_{x\to+\infty} 4x^5$.

(b) *En déduire le nombre de racines de P_t dans $\mathbb{R}$ en distinguant plusieurs cas.*

▶ La fonction $x \mapsto P_t(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction polynomiale. On a $-4<0$ et

$$t^5-4>0 \iff t>4^{1/5} \quad \text{car la fonction } t\mapsto t^{1/5} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

À l'aide du tableau des variations de la question précédente et d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $P_t(x)=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ admet :

- une seule solution $x_1 \in]0,+\infty[$ si $t^5-4<0 \iff t<4^{1/5}$
- deux solutions $x_1=-t$ et $x_2\in]0,+\infty[$ si $t^5-4=0 \iff t=4^{1/5}$
- trois solutions $x_1\in]-\infty,-t[$, $x_2\in]-t,0[$ et $x_3\in]0,+\infty[$ si $t^5-4>0 \iff t>4^{1/5}$.

Finalement, le nombre de racines de P_t dans $\mathbb{R}$ vaut $\boxed{1 \text{ si } t<4^{1/5},\ 2 \text{ si } t=4^{1/5} \text{ et } 3 \text{ si } t>4^{1/5}}$.

Pour la suite de l'énoncé, on note $r(t)$ l'unique racine réelle positive de P_t pour tout $t>0$.

5. *Justifier que $r(t)\in]0,1[$ pour tout $t>0$.*

▶ Soit $t>0$. On a :

$$P_t(0) = -4 < 0 \quad \text{et} \quad P_t(1) = 4+5t-4 = 5t > 0.$$

D'après le tableau des variations de la question 4(a), on en déduit que $\boxed{r(t)\in]0,1[}$.

x	0		$r(t)$		1
$P_t(x)$	-4	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$5t$

6. ***(Informatique)***

(a) *En utilisant la fonction `polynome`, écrire une fonction `dichotomie1(t,n)` qui prend en arguments une valeur du paramètre $t>0$ et un entier $n\in\mathbb{N}$ puis qui renvoie, à l'aide d'un algorithme de dichotomie, le n-ième terme d'une suite qui converge vers $r(t)$.*

▶ On définit deux suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ par :

$$a_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n\geqslant 0,\ a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2})<0 \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$b_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n\geqslant 0,\ b_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f(a_n)f(\frac{a_n+b_n}{2})<0 \\ b_n & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après la méthode de dichotomie, les suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ sont adjacentes et convergent vers une solution de l'équation $P_t(x)=0$ d'inconnue $x\in[0,1]$. Puisque cette équation admet $r(t)$ comme unique solution d'après le résultat de la question précédente, il suffit donc que la fonction `dichotomie1` renvoie le n-ième terme d'une de ces deux suites. Par exemple :

```
def dichotomie1(t,n):
    a=0
    b=1
    for i in range(n):
        if polynome(t,a)*polynome(t,(a+b)/2)<0:
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
    return a
```

(b) *Écrire une fonction* `approximation1(t,epsilon)` *qui prend en arguments une valeur du paramètre $t > 0$ et une précision $\varepsilon > 0$ puis qui renvoie une valeur approchée de $r(t)$ à ε près.*

▶ De plus, on sait d'après la méthode de dichotomie que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad a_n \leqslant r(t) \leqslant b_n \quad \text{et} \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{1}{2^n}.$$

On en déduit que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant r(t) - a_n \leqslant b_n - a_n = \frac{1}{2^n} \quad \text{donc} \quad |a_n - r(t)| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

Ainsi, pour obtenir une valeur approchée de $r(t)$ à ε près, il suffit de renvoyer le terme a_n en choisissant une valeur de $n \geqslant 0$ suffisamment grande pour que $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$. Par exemple :

```
def approximation1(t,epsilon):
    n=0
    while 1/(2**n)>epsilon:
        n=n+1
    return dichotomie1(t,n)
```

On peut également résoudre l'inéquation $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon \iff n \geqslant \lfloor \ln(\frac{1}{\varepsilon})/\ln(2) \rfloor + 1$ pour calculer une valeur de n directement sans boucle `while`. *Par exemple :*

```
import numpy as np
def approximation1(t,epsilon):
    n=np.floor(np.log(1/epsilon)/np.log(2))+1
    return dichotomie1(t,n)
```

7. (a) *On fixe $t_2 > t_1 > 0$ dans cette question. Déterminer le signe de $P_{t_1}(r(t_2))$.*

▶ On a :

$$P_{t_1}(r(t_2)) = 4(r(t_2))^5 + 5t_1(r(t_2))^4 - 4.$$

Or :

$$4(r(t_2))^5 + 5t_2(r(t_2))^4 - 4 = P_{t_2}(r(t_2)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t_2).$$

Donc :

$$4(r(t_2))^5 = -5t_2(r(t_2))^4 + 4$$

et :

$$P_{t_1}(r(t_2)) = -5t_2(r(t_2))^4 + 4 + 5t_1(r(t_2))^4 - 4 = 5(t_1 - t_2)(r(t_2))^4.$$

Puisque $t_1 - t_2 < 0$ (car $t_2 > t_1$) et $r(t_2) > 0$ d'après le résultat de la question 5, on en déduit que $\boxed{P_{t_1}(r(t_2)) < 0}$.

(b) *En déduire la monotonie de la fonction $r : t \mapsto r(t)$ sur $]0, +\infty[$.*

▶ On fixe $t_2 > t_1 > 0$. On sait que la fonction $x \mapsto P_{t_1}(x)$ est strictement croissante sur $]0, 1[$ d'après le tableau des variations de la question 4(a). Or $P_{t_1}(r(t_2)) < 0 = P_{t_1}(r(t_1))$ d'après le résultat de la question précédente. Par conséquent, on a montré que $r(t_2) < r(t_1)$.

x	0	$r(t_2)$	$r(t_1)$	1
$P_{t_1}(x)$	-4	< 0	$= 0$	$5t_1$

Puisque ceci est vrai pour tout $(t_1, t_2) \in]0, +\infty[^2$ tels que $t_1 < t_2$, on en déduit que la fonction $\boxed{r : t \mapsto r(t) \text{ est strictement décroissante sur }]0, +\infty[}$.

8. (a) *Justifier que r se prolonge par continuité en 0.*

▶ La fonction r est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ d'après le résultat de la question précédente. De plus, elle est majorée par 1 d'après le résultat de la question 5. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la limite de $r(t)$ quand t tend vers 0^+ existe et est finie. Par conséquent, $\boxed{r \text{ est prolongeable par continuité en } 0}$ en posant $r(0) = \lim_{t \to 0^+} r(t)$.

(b) *On note encore r le prolongement obtenu. Déterminer $r(0)$.*

▶ On a pour tout $t > 0$:

$$4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = P_t(r(t)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t).$$

Puisque $r(0) = \lim_{t \to 0^+} r(t)$ d'après le résultat de la question précédente, on obtient en passant à la limite quand $t \to 0^+$:

$$0 = \lim_{t \to 0^+} 4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = 4r(0)^5 + 5 \times 0 \times r(0)^4 - 4 = 4(r(0)^5 - 1).$$

On en déduit que $r(0)^5 = 1$ donc $\boxed{r(0) = 1}$.

(c) *Montrer que $r(t) - 1$ est équivalent à $-t/4$ quand t tend vers 0^+.*

▶ On a pour tout $t > 0$:

$$4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = P_t(r(t)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t).$$

Par conséquent :

$$\forall t > 0, \quad -\frac{5}{4}t(r(t))^4 = (r(t))^5 - 1 = \Big(1 + (r(t) - 1)\Big)^5 - 1.$$

Or $\lim_{t \to 0^+} r(t) = r(0) = 1$ d'après le résultat de la question précédente. Donc $-\frac{5}{4}t(r(t))^4$ est équivalent à $-\frac{5}{4}t$ quand t tend vers 0^+. De plus $\lim_{t \to 0^+}(r(t) - 1) = 0$ et donc d'après les équivalents usuels :

$$\Big(1 + (r(t) - 1)\Big)^5 - 1 \underset{t \to 0^+}{\sim} 5(r(t) - 1).$$

Finalement, on a :

$$-\frac{5}{4}t \underset{t \to 0^+}{\sim} -\frac{5}{4}t(r(t)) = \Big(1 + (r(t) - 1)\Big)^5 - 1 \underset{t \to 0^+}{\sim} 5(r(t) - 1) \quad \text{donc} \quad \boxed{r(t) - 1 \underset{t \to 0^+}{\sim} -\frac{t}{4}}.$$

9. (a) *Justifier que $\ell = \lim_{t \to +\infty} r(t)$ existe et est finie.*

▶ La fonction r est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ d'après le résultat de la question 7(b). De plus, elle est minorée par 0 d'après le résultat de la question 5. D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que $\boxed{\ell = \lim_{t \to +\infty} r(t) \text{ existe et est finie}}$.

(b) Montrer que $\ell > 0$ est absurde. En déduire la valeur de ℓ.

▶ On suppose que $\ell > 0$. On a pour tout $t > 0$:

$$4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = P_t(r(t)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t).$$

Puisque $\lim_{t\to+\infty} = \ell > 0$, on obtient en passant à la limite quand $t \to +\infty$.

$$0 = \lim_{t\to+\infty} \underbrace{4(r(t))^5}_{\to+\infty} + \underbrace{5t(r(t))^4}_{\to 5\ell(+\infty)=+\infty} - 4 = +\infty.$$

Ce qui est $\boxed{\text{absurde}}$. On en déduit que $\ell \leqslant 0$. Or on a $r(t) > 0$ pour tout $t > 0$ d'après le résultat de la question 5. En passant à la limite quand $t \to +\infty$, on en déduit que $\ell = \lim_{t\to+\infty} r(t) \geqslant 0$. Finalement, on a montré que $\boxed{\ell = 0}$.

(c) Montrer que $r(t)$ est équivalent à $(4/(5t))^{1/4}$ quand t tend vers $+\infty$.

▶ On a pour tout $t > 0$:

$$4(r(t))^5 + 5t(r(t))^4 - 4 = P_t(r(t)) = 0 \quad \text{par définition de } r(t).$$

Par conséquent :

$$\forall t > 0, \quad \frac{r(t)}{\left(\frac{4}{5t}\right)^{1/4}} = \left(\frac{5t(r(t))^4}{4}\right)^{1/4} = \left(\frac{4 - 4(r(t))^5}{4}\right)^{1/4} = \left(1 - (r(t))^5\right)^{1/4}.$$

Or $\lim_{t\to+\infty}(1 - (r(t))^5)^{1/4} = 1$ car $\lim_{t\to+\infty} r(t) = \ell = 1$ d'après le résultat de la question précédente. On en déduit bien que :

$$\boxed{r(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \left(\frac{4}{5t}\right)^{1/4}}.$$

10. *On pose la fonction $f : x \mapsto 4(1 - x^5)/(5x^4)$.*

(a) Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1]$ vers un intervalle à déterminer.

▶ La fonction f est définie et dérivable sur l'intervalle $]0, 1]$ comme quotient de fonctions polynomiales dont le dénominateur ne s'annule pas (car $5x^4 = 0 \iff x = 0$). On a :

$$\forall x \in]0, 1], \quad f'(x) = 4\frac{-5x^4(5x^4) - (1 - x^5)20x^3}{(5x^4)^2} = 4\frac{-25x^8 - 20x^3 + 20x^8}{25x^8}$$
$$= -4x^3\frac{x^5 + 4}{5x^4} < 0 \quad \text{car } x > 0.$$

De plus :

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} 4\frac{1 - x^5}{5x^4} = +\infty \quad \text{et} \quad f(1) = 4\frac{1 - 1}{5} = 0.$$

On en déduit le tableau des variations de f :

x	0	1
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$ 0

Ainsi, f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0, 1]$. D'après le théorème de la bijection, on en déduit que $\boxed{f :]0, 1] \to [0, +\infty[\text{ est bijective}}$.

(b) *Justifier que r est la bijection réciproque de f et en déduire que r est continue sur $[0,+\infty[$.*

▶ On a pour tout $t>0$:

$$4(r(t))^5+5t(r(t))^4-4=P_t(r(t))=0 \quad \text{par définition de } r(t)$$

donc :

$$f(r(t))=4\frac{1-(r(t))^5}{5(r(t))^4}=\frac{4-4(r(t))^5}{5(r(t))^4}=\frac{5t(r(t))^4}{5(r(t))^4}=t.$$

On en déduit que $f\circ r=\mathrm{Id}_{]0,+\infty[}$.

> *Attention : cela ne suffit pas à montrer que r est la bijection réciproque de f. Il faut aussi vérifier que $r\circ f=\mathrm{Id}_{]0,1]}$.*

Soit $x\in]0,1]$. Par définition $r(f(x))$ est l'unique racine réelle positive du polynôme $P_{f(x)}$. Or on a $x>0$ et :

$$P_{f(x)}(x)=4x^5+5f(x)x^4-4=4x^5+20\frac{1-x^5}{5x^4}x^4-4=4x^5+4-4x^5-4=0.$$

Par conséquent $r(f(x))=x$ donc $r\circ f=\mathrm{Id}_{]0,1]}$. On en déduit que $r:[0,+\infty[\to]0,1]$ est la bijection réciproque de $f:]0,1]\to[0,+\infty[$. De plus, en reprenant le raisonnement de la question précédente, on sait d'après le théorème de la bijection que la bijection réciproque de $f:]0,1]\to[0,+\infty[$ est continue. Finalement, on a bien montré que r est continue sur $[0,+\infty[$.

11. (a) *Justifier que P_t admet également une unique racine réelle positive pour tout $t<0$.*

▶ Soit $t<0$. En reprenant les calculs des questions 4(a) et 4(b), on obtient le tableau des variations suivant :

x	$-\infty$		0		$-t$		$+\infty$
$P_t'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P_t(x)$	$-\infty$	↗	-4	↘	t^5-4	↗	$+\infty$

On en déduit, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, que l'équation $P_t(x)=0$ d'inconnue $x\in\mathbb{R}$ admet une seule solution $x\in]-t,+\infty[$. Par conséquent, P_t admet une unique racine réelle qui est positive car $-t>0$.

On note encore $r(t)$ cette racine pour tout $t<0$.

(b) ***(Informatique)*** *On considère la fonction* `mystere` *suivante.*

```
def mystere(t):
    k=0
    while polynome(t,k)<=0:
        k=k+1
    return k
```

i. *Expliquer ce que renvoie la fonction* `mystere`.

▶ La fonction `mystere` teste tous les entiers $k\geqslant 0$ les uns après les autres et renvoie la première valeur trouvée telle que $P_t(k)>0$. Autrement dit, la fonction `mystere` renvoie le plus petit entier $k\geqslant 0$ dont l'image par P_t est strictement positive.

ii. *À l'aide de la fonction* `mystere`, *écrire une fonction* `dichotomie2(t,n)` *et une fonction* `approximation2(t,epsilon)` *similaires à celles des questions 6(a) et 6(b) mais qui prennent en argument une valeur du paramètre $t<0$.*

▶ On reprend le raisonnement des questions 6(a) et 6(b) pour l'équation $P_t(x) = 0$ d'inconnue $x \in [a, b]$ où $a < b$ sont deux réels tels que $P_t(a) < 0$ et $P_t(b) > 0$. D'après le tableau des variations de la question 11(a) et le résultat de la question précédente, on peut choisir $a = -t$ et $b =$ `mystere(t)`. Par exemple :

```
def dichotomie2(t,n):
    a=-t
    b=mystere(t)
    for i in range(n):
        if polynome(t,a)*polynome(t,(a+b)/2)<0:
            b=(a+b)/2
        else:
            a=(a+b)/2
    return a
```

```
def approximation2(t,epsilon):
    n=0
    while (mystere(t)+t)/(2**n)>epsilon:
        n=n+1
    return dichotomie2(t,n)
```

Attention, si on choisit $a = -t$ et $b =$ `mystere(t)` alors on a :

$$\forall n \geqslant 0, \quad b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} = \frac{b - a}{2^n} = \frac{\texttt{mystere(t)} + t}{2^n}.$$

Il faut donc modifier l'algorithme de la question 6(b) pour choisir une valeur de $n \geqslant 0$ suffisamment grande pour que $\frac{\texttt{mystere(t)}+t}{2^n} \leqslant \varepsilon$.

(c) À l'aide de la fonction f définie à la question 10, montrer que r est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, puis déterminer $\lim_{t \to -\infty} r(t)$ et un équivalent simple de $r(t)$ quand $t \to -\infty$.

▶ En reprenant le raisonnement de la question 10(a), on obtient que la fonction f est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ avec $f'(x) > 0$ pour tout $x > 0$. Son tableau des variations est :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$ 0 $\searrow$	$-\infty$

car :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 4\frac{\overbrace{1 - x^5}^{\sim -x^5}}{5x^4} = \lim_{x \to +\infty} \frac{-4x^5}{5x^4} = \lim_{x \to +\infty} -\frac{4}{5}x = -\infty.$$

Ainsi, d'après le théorème de la bijection, $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est bijective. En reprenant le raisonnement de la question 10(b), on obtient que $f \circ r = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $r \circ f = \mathrm{Id}_{]0,+\infty[}$, donc $r : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est la bijection réciproque de $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$. Par conséquent, $\boxed{r \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$ d'après le théorème de la bijection. De plus, on obtient le tableau des variations suivant :

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$r(t)$	$+\infty$	$\searrow$ 1 $\searrow$	0

Donc $\boxed{r \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}}$ et $\boxed{\lim_{t\to-\infty} r(t) = +\infty}$. De plus on a :

$$f(x) = 4\frac{1-x^5}{5x^4} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-4x^5}{5x^4} = -\frac{4}{5}x.$$

À l'aide du changement de variable $x = r(t)$, on en déduit que :

$$t = f(r(t)) \underset{t\to-\infty}{\sim} -\frac{4}{5}r(t) \quad \text{car} \lim_{t\to-\infty} x = +\infty.$$

Finalement, on obtient en multipliant cette équivalent par $-5/4$:

$$\boxed{r(t) \underset{t\to-\infty}{\sim} -\frac{5t}{4}}.$$