DS 7 mathématiques

BCPST 1 2018-2019

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Problème 1 : étude d'intersections

Dans tout le problème, les sous-espaces vectoriels considérés sont inclus dans $\mathbb{R}^4$ et on note $0_{\mathbb{R}^4}$ le vecteur nul.

Dans $\mathbb{R}^4$, il existe cinq catégories de sous-espaces vectoriels :

- l'unique sous-espace vectoriel de dimension 0 qui est $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$,
- les sous-espaces vectoriels de dimension 1 aussi appelés **droites vectorielles**,
- les sous-espaces vectoriels de dimension 2 aussi appelés **plans vectoriels**,
- les sous-espaces vectoriels de dimension 3,
- et $\mathbb{R}^4$.

On rappelle que l'intersection de deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ est un espace vectoriel de dimension 2 (s'ils sont confondus), 1 (s'ils s'intersectent selon une droite vectorielle) ou bien 0 (si leur intersection contient seulement le vecteur nul).

On présente un problème qui a intéressé le mathématicien Hermann Schubert :

"étant donné E_1, E_2, F_1, F_2 quatre plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ tels que $E_1 \cap E_2$ et $F_1 \cap F_2$ sont égales à des droites vectorielles et les $E_i \cap F_j$ sont réduits à $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$, décrire les plans vectoriels V tels que les $V \cap E_i$ et $V \cap F_i$ sont des droites vectorielles."

Autrement dit, E_1, E_2, F_1, F_2 sont des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$ vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\begin{array}{l} \dim(E_1 \cap E_2) = \dim(F_1 \cap F_2) = 1, \\ \dim(E_1 \cap F_1) = \dim(E_1 \cap F_2) = \dim(E_2 \cap F_1) = \dim(E_2 \cap F_2) = 0 \end{array} \tag{D}$$

et on cherche les sous-espaces vectoriels V de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$\dim(V \cap E_1) = \dim(V \cap E_2) = \dim(V \cap F_1) = \dim(V \cap F_2) = 1. \tag{SC}$$

Ce problème se propose d'étudier un cas particulier du problème de Schubert. Dans la partie 1, on justifie que les E_1, E_2, F_1, F_2 donnés vérifient les hypothèses (D). Puis, dans la partie 2, on construit deux plans vectoriels V_1 et V_2 vérifiant (SC). Enfin, on montre que V_1 et V_2 sont les seuls plans vectoriels vérifiant (SC) dans la partie 3.

Partie 1 : présentation de l'exemple

On pose :

$$E_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + 2y - z - t = 0 \text{ et } 3x + y + 2z + t = 0\right\}, \quad E_2 = \mathrm{vect}((3,1,2,-1),(-4,0,-1,1)),$$

$$F_1 = \mathrm{vect}((2,-1,1,-2),(1,1,3,1)), \qquad F_2 = \mathrm{vect}((4,-3,2,1),(0,-4,-5,1))$$

$$G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + 4t = 0 \text{ et } -y + z + t = 0\right\}.$$

1. (**INFO**) Écrire une fonction `est_dans_E1(L)` qui prend en argument une liste L de réels de longueur 4 et qui renvoie `True` si $(L[0], L[1], L[2], L[3])$ est un élément de E_1 et `False` sinon.
2. Déterminer une base de E_1 et montrer que E_1 est bien un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer que E_2, F_1, F_2 sont bien des plans vectoriels.
4. Montrer que $G = E_2$.

5. Déterminer un système d'équations linéaires (S) tel que pour tout $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$, on ait :

$$(x, y, z, t) \in F_1 \Leftrightarrow (x, y, z, t) \text{ solution de } (S).$$

6. Trouver une base de $E_1 \cap E_2$ et calculer la dimension de $E_1 \cap E_2$. On pourra déterminer les éléments de E_2 vérifiant le système d'équations caractérisant les éléments de E_1.
7. Trouver une base de $F_1 \cap F_2$ et calculer la dimension de $F_1 \cap F_2$.
8. Montrer que $\dim(E_1 \cap F_1) = \dim(E_1 \cap F_2) = \dim(E_2 \cap F_1) = \dim(E_2 \cap F_2) = 0$.
9. Conclure à l'aide des questions précédentes que E_1, E_2, F_1, F_2 vérifient bien les conditions (D).

Partie 2 : construction de solutions

Dans la suite, on pose $e = (-1, 1, 1, 0)$ et $f = (4, 1, 7, 0)$. On a alors $\mathrm{vect}(e) = E_1 \cap E_2$ et $\mathrm{vect}(f) = F_1 \cap F_2$.

10. On pose $V_1 = \mathrm{vect}(e, f)$. Montrer que V_1 est un plan vectoriel et qu'il vérifie les conditions (SC).
11. On pose :

$$E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + 22y - 21z - 17t = 0\}, F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | 27x + 25y - 19z + 5t = 0\}.$$

    Montrer que E et F sont de dimension 3.
12. Montrer que $E_1 \subset E, E_2 \subset E, F_1 \subset F, F_2 \subset F$.
13. On pose $V_2 = E \cap F$.
    (a) Montrer que V_2 est bien un plan vectoriel.
    (b) Soient H un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$ et soient P et Q deux plans vectoriels différents. On suppose que $P \subset H$ et $Q \subset H$ et on note (p_1, p_2) une base de P et (q_1, q_2) une base de Q.
        i. Justifier que $\dim(P \cap Q) \leq 1$.
        ii. Montrer que (p_1, p_2, q_1) ou (p_1, p_2, q_2) est une base de H. Quitte à échanger q_1 et q_2, on suppose que (p_1, p_2, q_1) est une base de H.
        iii. En écrivant q_2 dans la base (p_1, p_2, q_1) montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $q_2 + \lambda q_1 \in P \cap Q$.
        iv. En déduire que $\dim(P \cap Q) = 1$.
    (c) Déduire des questions précédentes que V_2 vérifie (SC).

Partie 3 : analyse du problème

On garde les notations introduites dans la partie 2.
Soit V un plan vectoriel vérifiant (SC). On veut montrer que $V = V_1$ ou $V = V_2$.

14. Justifier qu'il existe v_1, v_2, w_1, w_2 des éléments de $\mathbb{R}^4 \backslash \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ tels que

$$\mathrm{vect}(v_1) = V \cap E_1, \mathrm{vect}(v_2) = V \cap E_2, \mathrm{vect}(w_1) = V \cap F_1, \mathrm{vect}(w_2) = V \cap F_2.$$

15. Montrer que $\mathrm{vect}(v_1, v_2) \subset V \cap E$ et $\mathrm{vect}(w_1, w_2) \subset V \cap F$.
16. (**INFO**) Écrire une fonction Python `est_libre(L,M)` qui prend en arguments deux listes L, M de réels de longueur 4 et qui renvoie `True` si $((L[0], L[1], L[2], L[3]), (M[0], M[1], M[2], M[3]))$ est une famille libre et `False` sinon.
17. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
    (a) (v_1, v_2) est liée,
    (b) e est un élément de V,
    (c) V n'est pas inclus dans F,
    (d) (w_1, w_2) est liée,
    (e) f est un élément de V,
    (f) V n'est pas inclus dans E.
18. En déduire que (v_1, v_2) est une base de V si et seulement si (w_1, w_2) est une base de V.
19. Déduire des questions précédentes que $V = V_1$ ou $V = V_2$.

DS n$^{\text{o}}$ 7 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Problème 2

Ce problème présente une méthode numérique, appelée méthode des trapèzes, permettant de calculer des approximations de la valeur d'une intégrale. Les parties 1 et 2 détaillent cette méthode alors que la partie 3 propose de l'appliquer sur un exemple et de l'implémenter en Python. Seuls les résultats encadrés (qu'on peut admettre si besoin) sont utilisés d'une partie à l'autre.

Partie 1 - Une première approximation

On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ où $a < b$ sont deux réels fixés. On pose g la fonction affine définie par $g(a) = f(a)$ et $g(b) = f(b)$. Le but de cette partie est d'estimer l'erreur commise si on approche $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (qui correspond à l'aire d'un trapèze). Pour cela, on pose la fonction :

$$h : x \mapsto f(x) - g(x) - \lambda(x - a)(x - b)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante qui sera fixée à la question 3.

1. (a) Déterminer une expression de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = (b - a)(f(a) + f(b))/2$.
2. Calculer $\int_a^b (x - a)(x - b)\mathrm{d}x$ et écrire le résultat sous la forme $\mu(b - a)^3$ où $\mu \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer.
3. Montrer qu'on peut choisir la constante $\lambda \in \mathbb{R}$ afin que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$ Dans la suite, on fixe la constante λ de cette façon et on suppose donc que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.
4. De quelle classe est la fonction h sur $[a, b]$? Justifier que la fonction h admet des primitives sur $[a, b]$. On note H une primitive de h sur $[a, b]$. Que peut-on dire des images $H(a)$ et $H(b)$?
5. (a) Déduire du résultat précédent qu'il existe un réel $c_0 \in]a, b[$ tel que $h(c_0) = 0$.
   (b) Prouver qu'il existe deux réels $(c_1, c_2) \in]a, b[^2$ tels que $c_1 < c_2$ et $h'(c_1) = h'(c_2) = 0$.
   (c) Prouver qu'il existe un réel $c \in]c_1, c_2[$ tel que $f''(c) = 2\lambda$.
6. Déduire des résultats précédents que :

$$\boxed{\exists c \in [a, b], \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b - a)\frac{f(a) + f(b)}{2} = -\frac{(b - a)^3}{12} f''(c)}.$$

Partie 2 - La méthode des trapèzes

On considère toujours une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a, b]$ où $a < b$ sont deux réels fixés. De plus, on pose un entier $n \geqslant 1$. Le principe de la méthode des trapèzes est de subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même longueur sur chacun desquels on va appliquer l'approximation de la partie 1. Plus précisément, on définit $n + 1$ réels notés $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ par :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b \quad \text{et} \quad a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = \cdots = a_n - a_{n-1}$$

et on remarque que $[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \cdots \cup [a_{n-1}, a_n] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [a_k, a_{k+1}]$.

7. (a) Soit $k \in \{0,1,2,\ldots,n\}$. Déterminer une expression de a_k en fonction de a, b, k et n.
   (b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\tfrac{b-a}{n}\right)\right).$$

   Dans la suite, on note $T_n(f)$ le membre de droite de cette égalité, c'est-à-dire :

$$\boxed{T_n(f) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(a+k\tfrac{b-a}{n}\right)\right)}.$$

8. (a) Justifier que la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ admet un maximum sur $[a,b]$. Dans la suite, on note M la valeur de ce maximum.
   (b) Montrer que :

$$\forall k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}, \quad \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^3M}{12n^3}.$$

9. Déduire des résultats précédents que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3M}{12n^2}}.$$

10. Quelle est la limite de $T_n(f)$ quand n tend vers $+\infty$?

Partie 3 - Application numérique

Dans cette partie, on propose d'appliquer la méthode des trapèzes pour approcher la valeur de $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$. On pose donc la fonction $f : x \mapsto \exp(-x^2)$.

11. (a) De quelle classe est la fonction f sur $\mathbb{R}$?
    (b) Prouver que pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe un polynôme $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}.$$

    (c) Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3.
12. Montrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ sur $[0,1]$ est égal à $M = 2$.
13. **Informatique.** On écrira les fonctions demandées en Python et on utilisera la fonction `exp` de la bibliothèque `numpy`.
    (a) Écrire une fonction `f(x)` qui prend en argument un réel x et renvoie la valeur de e^{-x^2}.
    (b) Écrire une fonction `T(n,a,b)` qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et deux réels $a < b$ puis qui renvoie la valeur de $T_n(f)$.
    (c) Écrire une fonction `approx(epsilon)` qui prend un argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie une approximation de la valeur de $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ à ε près.