DS 7 mathématiques

BCPST 1 2018-2019

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Problème 1 : étude d'intersections

Dans tout le problème, les sous-espaces vectoriels considérés sont inclus dans $\mathbb{R}^4$ et on note $0_{\mathbb{R}^4}$ le vecteur nul.

Dans $\mathbb{R}^4$, il existe cinq catégories de sous-espaces vectoriels :

— l'unique sous-espace vectoriel de dimension 0 qui est $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$,
— les sous-espaces vectoriels de dimension 1 aussi appelés **droites vectorielles**,
— les sous-espaces vectoriels de dimension 2 aussi appelés **plans vectoriels**,
— les sous-espaces vectoriels de dimension 3,
— et $\mathbb{R}^4$.

On rappelle que l'intersection de deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ est un espace vectoriel de dimension 2 (s'ils sont confondus), 1 (s'ils s'intersectent selon une droite vectorielle) ou bien 0 (si leur intersection contient seulement le vecteur nul).

On présente un problème qui a intéressé le mathématicien Hermann Schubert :

"étant donné E_1, E_2, F_1, F_2 quatre plans vectoriels de $\mathbb{R}^4$ tels que $E_1 \cap E_2$ et $F_1 \cap F_2$ sont égales à des droites vectorielles et les $E_i \cap F_j$ sont réduits à $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$, décrire les plans vectoriels V tels que les $V \cap E_i$ et $V \cap F_i$ sont des droites vectorielles."

Autrement dit, E_1, E_2, F_1, F_2 sont des sous-espaces vectoriels de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$ vérifiant les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} &\dim(E_1 \cap E_2) = \dim(F_1 \cap F_2) = 1, \\ &\dim(E_1 \cap F_1) = \dim(E_1 \cap F_2) = \dim(E_2 \cap F_1) = \dim(E_2 \cap F_2) = 0 \end{aligned} \tag{D}$$

et on cherche les sous-espaces vectoriels V de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$\dim(V \cap E_1) = \dim(V \cap E_2) = \dim(V \cap F_1) = \dim(V \cap F_2) = 1. \tag{SC}$$

Ce problème se propose d'étudier un cas particulier du problème de Schubert. Dans la partie 1, on justifie que les E_1, E_2, F_1, F_2 donnés vérifient les hypothèses (D). Puis, dans la partie 2, on construit deux plans vectoriels V_1 et V_2 vérifiant (SC). Enfin, on montre que V_1 et V_2 sont les seuls plans vectoriels vérifiant (SC) dans la partie 3.

Partie 1 : présentation de l'exemple

On pose :

$$E_1 = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + 2y - z - t = 0 \text{ et } 3x + y + 2z + t = 0\right\}, \quad E_2 = \text{vect}((3,1,2,-1),(-4,0,-1,1)),$$

$$F_1 = \text{vect}((2,-1,1,-2),(1,1,3,1)), \qquad F_2 = \text{vect}((4,-3,2,1),(0,-4,-5,1))$$

$$G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + y + 4t = 0 \text{ et } -y + z + t = 0\right\}.$$

1. (**INFO**) Écrire une fonction `est_dans_E1(L)` qui prend en argument une liste L de réels de longueur 4 et qui renvoie `True` si $(L[0], L[1], L[2], L[3])$ est un élément de E_1 et `False` sinon.
2. Déterminer une base de E_1 et montrer que E_1 est bien un plan vectoriel de $\mathbb{R}^4$.
3. Montrer que E_2, F_1, F_2 sont bien des plans vectoriels.
4. Montrer que $G = E_2$.

5. Déterminer un système d'équations linéaires (S) tel que pour tout $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$, on ait :

$$(x,y,z,t)\in F_1 \Leftrightarrow (x,y,z,t) \text{ solution de } (S).$$

6. Trouver une base de $E_1\cap E_2$ et calculer la dimension de $E_1\cap E_2$. On pourra déterminer les éléments de E_2 vérifiant le système d'équations caractérisant les éléments de E_1.
7. Trouver une base de $F_1\cap F_2$ et calculer la dimension de $F_1\cap F_2$.
8. Montrer que $\dim(E_1\cap F_1)=\dim(E_1\cap F_2)=\dim(E_2\cap F_1)=\dim(E_2\cap F_2)=0$.
9. Conclure à l'aide des questions précédentes que E_1,E_2,F_1,F_2 vérifient bien les conditions (D).

Correction

1. Voici la fonction demandée :

```
def est_dans_E1(L) :
    if len(L)==4 :
        a=L[0]+2*L[1]-L[2]-L[3]
        b=3*L[0]+L[1]+2*L[2]+L[3]
        return  (a==0) and (b==0)
    else :
        return
```

2. Donnons une représentation paramétrique de E_1. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned}\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z-t &=& 0\\ 3x+y+2z+t &=& 0\end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z-t &=& 0\\ 4x+3y+z &=& 0\end{array}\right. \quad (L_2\leftarrow L_2+L_1)\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t &=& x+2y-z\\ z &=& -4x-3y\end{array}\right.\\ &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} t &=& 5x+5y\\ z &=& -4x-3y\end{array}\right.\end{aligned}$$

On en déduit que $E_1=\{(x,y,-4x-3y,5x+5y),(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$.
Donc $E_1=\mathrm{vect}((1,0,-4,5),(0,1,-3,5))$. $((1,0,-4,5),(0,1,-3,5))$ est donc <u>une famille génératrice de E_1</u>.
Montrons que c'est une famille libre. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^4$ tel que

$$\alpha(1,0,-4,5)+\beta(0,1,-3,5)=(0,0,0,0).$$

D'où

$$(\alpha,\beta,-4\alpha-3\beta,5\alpha+5\beta)=(0,0,0,0)$$

Donc $\alpha=0,\beta=0$. On en déduit que $((1,0,-4,5),(0,1,-3,5))$ est <u>libre</u>.
Il en résulte que $\boxed{((1,0,-4,5),(0,1,-3,5)) \text{ est une base de } E_1}$.
E_1 admettant une base de cardinal 2, on en déduit que E_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2. Autrement dit, $\boxed{E_1 \text{ est un plan vectoriel}}$.

3. On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, $\mathcal{E}_2=((3,1,2,-1),(-4,0,-1,1))$, $\mathcal{F}_1=((2,-1,1,-2),(1,1,3,1))$ et $\mathcal{F}_2=((4,-3,2,1),(0,-4,-5,1))$. Montrer que E_2,F_1,F_2 sont bien des plans vectoriels revient alors à montrer que les rangs des familles $\mathcal{E}_2,\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2$ sont tous égaux à 2. Calculons leur rang à l'aide de la méthode du pivot appliquée à leur matrice représentative dans la base canonique. On a :

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}_2)=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & 0\\ 2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_1}\begin{pmatrix}\underline{1} & 0\\ 3 & \underline{-4}\\ 2 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice étant échelonnée en colonnes et de rang 2, on en déduit que $\mathcal{E}_2$ est de $\underline{\text{rang } 2}$.
De même,

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} \underline{3} & 0 \\ -1 & \underline{1} \\ 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice étant échelonnée en colonnes et de rang 2, on en déduit que $\mathcal{F}_1$ est de $\underline{\text{rang } 2}$.
Enfin,

$$\mathcal{M}at_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_2) = \begin{pmatrix} \underline{4} & 0 \\ -3 & \underline{-4} \\ 2 & -5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette dernière matrice étant échelonnée en colonnes et de rang 2, on en déduit que $\mathcal{F}_2$ est de $\underline{\text{rang } 2}$.
Des calculs précédents, on en déduit que E_2, F_1, F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ de dimension 2.
$\boxed{\text{Donc ce sont bien des plans vectoriels.}}$

4. Montrons que $G = E_2$. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{rcl} x + y + 4t & = & 0 \\ -y + z + t & = & 0 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y - 4t \\ y & = & -z - t \end{array} \right. \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & z - 3t \\ y & = & -z - t \end{array} \right. \end{aligned}.$$

On en déduit que G est égal à $\text{vect}((1, -1, 0, 1), (-3, -1, 0, 1))$. Ainsi, G est égal à un espace vectoriel engendré par deux éléments de $\mathbb{R}^4$. Donc $\dim(G) \leq 2$. Montrons que $E_2 \subset G$.
Soit $(x, y, z, t) \in E_2$. Il existe alors $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$(x, y, z, t) = (3\alpha - 4\beta, \alpha, 2\alpha - \beta, -\alpha + \beta).$$

Donc

$$x + y + 4t = (3\alpha - 4\beta) + \alpha + 4(-\alpha + \beta) = 4\alpha - 4\beta - 4\alpha + 4\beta = 0$$

et

$$-y + z + t = -(\alpha) + (2\alpha - \beta) + (-\alpha + \beta) = -2\alpha + 2\alpha - \beta + \beta = 0.$$

Donc $(x, y, z, t) \in G$. D'où $\underline{E_2 \subset G}$. Donc $\dim(E_2) \leq \dim(G)$. Or $\dim(E_2) = 2$. Donc $2 \leq \dim(G)$. Mais $2 \geq \dim(G)$. Il en résulte que $\underline{\dim(G) = 2 = \dim(E_2)}$.
$\boxed{\text{Il en résulte que } G = E_2}$.

5. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$(x, y, z, t) \in F_1 \Leftrightarrow \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^4, \lambda(2, -1, 1, -2) + \mu(1, 1, 3, 1) = (x, y, z, t)$$

Autrement dit, (x, y, z, t) est un élément de F_1 si et seulement si le système d'équations

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 2\lambda + \mu & = & x \\ -\lambda + \mu & = & y \\ \lambda + 3\mu & = & z \\ -2\lambda + \mu & = & t \end{array} \right.$$

d'inconnu $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ admet des solutions. Résolvons ce système :

$$\begin{cases} 2\lambda+\mu &= x\\ -\lambda+\mu &= y\\ \lambda+3\mu &= z\\ -2\lambda+\mu &= t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda+\mu &= x\\ -\lambda+\mu &= y\\ 4\mu &= y+z\\ 2\mu &= x+t\end{cases} \qquad (L_4\leftarrow L_4+L_1, L_3\leftarrow L_3+L_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda+\mu &= x\\ 3\mu &= 2y+x\\ 4\mu &= y+z\\ 2\mu &= x+t\end{cases} \qquad (L_2\leftarrow 2L_2+L_1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda+\mu &= x\\ \mu &= 2y-t\\ 4\mu &= y+z\\ 2\mu &= x+t\end{cases} \qquad (L_2\leftarrow L_2-L_4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda+\mu &= x\\ \mu &= 2y-t\\ 0 &= -7y+z+4t\\ 0 &= x-4y+3t\end{cases} \qquad (L_3\leftarrow L_3-4L_2, L_4\leftarrow L_4-2L_2)$$

De cette étude, on en déduit que $(x,y,z,t)\in F_1$ si et seulement si :

$$\boxed{x-4y+3t=0 \ \text{ et } \ -7y+z+4t=0.}$$

6. Soit $\lambda(3,1,2,-1)+\mu(-4,0,-1,1)$ un élément de E_2. Cet élément est un élément de E_1 si et seulement si :

$$\begin{cases} (3\lambda-4\mu)+2(\lambda)-(2\lambda-\mu)-(-\lambda+\mu) &= 0\\ 3(3\lambda-4\mu)+(\lambda)+2(2\lambda-\mu)+(-\lambda+\mu) &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\lambda-4\mu &= 0\\ 13\lambda-13\mu &= 0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \lambda=\mu$$

En posant $\lambda=\mu=1$, on en déduit que $E_1\cap E_2=\mathrm{vect}((-1,1,1,0))$. Ce vecteur étant seul et non nul, on en déduit que la famille réduite à ce vecteur est une base de $E_1\cap E_2$. Donc $\underline{\dim(E_1\cap E_2)=1}$.

7. Soit $(x,y,z,t)\in F_1\cap F_2$. Par définition, il existe $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tels que

$$\lambda(2,-1,1,-2)+\mu(1,1,3,1)=\alpha(4,-3,2,1)+\beta(0,-4,-5,1)=(x,y,z,t)$$

Résolvons le système linéaire d'inconnus $\lambda, \mu, \alpha, \beta$ correspondant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 2\lambda+\mu & = & 4\alpha \\ -\lambda+\mu & = & -3\alpha-4\beta \\ \lambda+3\mu & = & 2\alpha-5\beta \\ -2\lambda+\mu & = & \alpha+\beta \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2\lambda+\mu & = & 4\alpha \\ -\lambda+\mu & = & -3\alpha-4\beta \\ 4\mu & = & -\alpha-9\beta \\ 2\mu & = & 5\alpha+\beta \end{array}\right. \quad (L_4 \leftarrow L_4+L_1, L_3 \leftarrow L_3+L_2)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2\lambda+\mu & = & 4\alpha \\ 3\mu & = & -2\alpha-8\beta \\ 4\mu & = & -\alpha-9\beta \\ 2\mu & = & 5\alpha+\beta \end{array}\right. \quad (L_2 \leftarrow 2L_2+L_1)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2\lambda+\mu & = & 4\alpha \\ 3\mu & = & -2\alpha-8\beta \\ 4\mu & = & -\alpha-9\beta \\ 0 & = & 11\alpha+11\beta \end{array}\right. \quad (L_4 \leftarrow 2L_4-L_3)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} 2\lambda+\mu & = & 4\alpha \\ 3\mu & = & 6\alpha \\ 4\mu & = & 8\alpha \\ \beta & = & -\alpha \end{array}\right. \quad \text{(en substituant } \beta \text{ par } -\alpha\text{)}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} \lambda & = & \alpha \\ \mu & = & 2\alpha \\ \beta & = & -\alpha \end{array}\right.$$

Donc $(x, y, z, t) \in F_1 \cap F_2$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$(x, y, z, t) = \alpha(4, -3, 2, 1) - \alpha(0, -4, -5, 1) = \alpha(4, 1, 7, 0).$$

Il en résulte que $\boxed{F_1 \cap F_2 = \text{vect}((4, 1, 7, 0))}$. Ce vecteur étant seul et non nul, on en déduit qu'il forme une famille libre. Étant génératrice de $F_1 \cap F_2$, il en résulte que c'est une base. Donc $\boxed{\dim(F_1 \cap F_2) = 1}$.

8. Montrer que pour tout $(i, j) \in \{1, 2\}^2$, $\dim(E_i \cap F_j) = 0$ revient à montrer que chacune des intersections est réduite à $0_{\mathbb{R}^4}$.
Déterminons $E_1 \cap F_1$. Soit $(x, y, z, t) \in E_1 \cap F_1$.
(x, y, z, t) étant un élément de F_1, il existe donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $(x, y, z, t) = \alpha(2, -1, 1, -2) + \beta(1, 1, 3, 1) = (2\alpha+\beta, -\alpha+\beta, \alpha+3\beta, -2\alpha+\beta)$.
Or (x, y, z, t) est aussi un élément de E_1. D'où

$$\left\{\begin{array}{lcl} x+2y-z-t & = & 0 \\ 3x+y+2z+t & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} (2\alpha+\beta)+2(-\alpha+\beta)-(\alpha+3\beta)-(-2\alpha+\beta) & = & 0 \\ 3(2\alpha+\beta)+(-\alpha+\beta)+2(\alpha+3\beta)+(-2\alpha+\beta) & = & 0 \end{array}\right.$$

Autrement dit,

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha-\beta & = & 0 \\ 5\alpha+11\beta & = & 0 \end{array}\right.$$

D'où

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & \beta \\ 16\beta & = & 0 \end{array}\right.$$

Donc $\beta = 0$ et $\alpha = 0$. Il en résulte que $(x, y, z, t) = 0_{\mathbb{R}^4}$.
Par conséquent, $\boxed{E_1 \cap F_1 \text{ est réduit à } \{0_{\mathbb{R}^4}\}}$.

Déterminons de la même façon $E_1 \cap F_2$. Soit $(x,y,z,t) = \alpha(4,-3,2,1) + \beta(0,-4,-5,1)$ un élément de $E_1 \cap F_2$. On a alors

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (4\alpha) + 2(-3\alpha - 4\beta) - (2\alpha - 5\beta) - (\alpha + \beta) & = & 0 \\ 3(4\alpha) + (-3\alpha - 4\beta) + 2(2\alpha - 5\beta) + (\alpha + \beta) & = & 0 \end{array} \right.$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -5\alpha - 4\beta & = & 0 \\ 16\alpha - 13\beta & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc

$$\begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 16 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de la matrice 2×2 étant égal à $5 \times 13 + 4 \times 16 > 0$, on en déduit que la matrice est inversible. En multipliant par l'inverse, on trouve que $\alpha = \beta = 0$. Donc $(x,y,z,t) = 0_{\mathbb{R}^4}$. Donc $\boxed{E_1 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^4}\}}$.

G étant égal à E_2, décrire $G \cap F_1$ et $G \cap F_2$ revient à décrire $G \cap F_1$ et $G \cap F_2$.

On procède alors de la même façon que précédemment.

Soit $(x,y,z,t) = \alpha(2,-1,1,-2) + \beta(1,1,3,1) \in E_2 \cap F_1$. On a donc

$$x + y + 4t = 0 \text{ et } -y + z + t = 0.$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{lcl} (2\alpha + \beta) + (-\alpha + \beta) + 4(-2\alpha + \beta) & = & 0 \\ -(-\alpha + \beta) + (\alpha + 3\beta) + (-2\alpha + \beta) & = & 0 \end{array} \right.$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -7\alpha + 6\beta & = & 0 \\ 3\beta & = & 0 \end{array} \right.$$

D'où $\alpha = \beta = 0$. Il en résulte que (x,y,z,t) est égal à $0_{\mathbb{R}^4}$. Donc $\boxed{E_2 \cap F_1 = \{0_{\mathbb{R}^4}\}}$.

Déterminons $E_2 \cap F_2$. Soit $(x,y,z,t) = \alpha(4,-3,2,1) + \beta(0,-4,-5,1) \in E_2 \cap F_2$.

On a donc

$$4\alpha + (-3\alpha - 4\beta) + 4(\alpha + \beta) = 0 \text{ et } -(-3\alpha - 4\beta) + (2\alpha - 5\beta) + (\alpha + \beta) = 0.$$

D'où

$$5\alpha = 0 \text{ et } -8\beta = 0.$$

Donc $\alpha = \beta = 0$. Autrement dit, $(x,y,z,t) = 0_{\mathbb{R}^4}$. On en déduit que $\boxed{E_2 \cap F_2 = \{0_{\mathbb{R}^4}\}}$.

9. En résumé, d'après les questions 2 et 3, E_1, E_2, F_1, F_2 sont des plans vectoriels. D'après les questions 6 et 7, on a $\dim(E_1 \cap E_2) = \dim(F_1 \cap F_2) = 1$.
   D'après la question 8, les intersections des $E_i \cap F_j$ sont réduits à $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$.
   Par conséquent, E_1, E_2, F_1, F_2 vérifient bien les conditions (D).

Partie 2 : construction de solutions

Dans la suite, on pose $e = (-1,1,1,0)$ et $f = (4,1,7,0)$. On a alors $\text{vect}(e) = E_1 \cap E_2$ et $\text{vect}(f) = F_1 \cap F_2$.

10. On pose $V_1 = \text{vect}(e,f)$. Montrer que V_1 est un plan vectoriel et qu'il vérifie les conditions (SC).
11. On pose :

$$E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x + 22y - 21z - 17t = 0\}, F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | 27x + 25y - 19z + 5t = 0\}.$$

    Montrer que E et F sont de dimension 3.
12. Montrer que $E_1 \subset E, E_2 \subset E, F_1 \subset F, F_2 \subset F$.
13. On pose $V_2 = E \cap F$.
    (a) Montrer que V_2 est bien un plan vectoriel.
    (b) Soient H un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$ et soient P et Q deux plans vectoriels différents. On suppose que $P \subset H$ et $Q \subset H$ et on note (p_1, p_2) une base de P et (q_1, q_2) une base de Q.
        i. Justifier que $\dim(P \cap Q) \leq 1$.

ii. Montrer que (p_1, p_2, q_1) ou (p_1, p_2, q_2) est une base de H. Quitte à échanger q_1 et q_2, on suppose que (p_1, p_2, q_1) est une base de H.

iii. En écrivant q_2 dans la base (p_1, p_2, q_1) montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $q_2 + \lambda q_1 \in P \cap Q$.

iv. En déduire que $\dim(P \cap Q) = 1$.

(c) Déduire des questions précédentes que V_2 vérifie (SC).

Correction

10. On pose $V_1 = \mathrm{vect}(e, f)$. Montrons que V_1. est un plan vectoriel. (e, f) étant une famille génératrice de V_1, on en déduit que V_1 est de dimension au plus 2. Vérifions que cette famille est libre. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\alpha(-1, 1, 1, 0) + \beta(4, 1, 7, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

D'où $-\alpha + 4\beta = 0$ et $\alpha + \beta = 0$. Donc $\alpha = 4\beta$ et $5\beta = 0$. Il en résulte que $\alpha = \beta = 0$. Donc (e, f) est une famille libre. Par conséquent, (e, f) est une base de V_1 et donc $\boxed{V_1 \text{ est bien un plan vectoriel}}$.

Montrons que V_1 vérifie les conditions (SC).

e étant un élément de $E_1 \cap E_2$, les intersections $E_1 \cap F_1$ et $E_1 \cap F_2$ étant réduits à $\{0_{\mathbb{R}^4}\}$, on en déduit que e n'est ni un élément de F_1 ni un élément de F_2. Donc $(V_1 \cap F_1)$ et $(V_1 \cap F_2)$ sont strictement inclus dans V_1. Donc $\dim(V_1 \cap F_1) < 2$ et $\dim(V_1 \cap F_2) < 2$. De plus, $f \in V_1 \cap F_1$ et $f \in V_1 \cap F_2$. Donc $\mathrm{vect}(f) \subset V_1 \cap F_1$ et $\mathrm{vect}(f) \subset V_1 \cap F_2$. Donc $\dim(V_1 \cap F_1) \geq 1$ et $\dim(V_1 \cap F_2) \geq 1$. Il en résulte que $\boxed{\dim(V_1 \cap F_1) = \dim(V_1 \cap F_2) = 1}$.

De même, en échangeant les rôles de e et f, de E_1 et F_1, de E_2 et F_2, on obtient que : $\boxed{\dim(V_1 \cap E_1) = \dim(V_1 \cap E_2) = 1}$.

11. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$(x, y, z, t) \in E \Leftrightarrow x = 22y - 21z - 17t$$

et

$$(x, y, z, t) \in F \Leftrightarrow x = \frac{-25}{27}y + \frac{19}{27}z - \frac{5}{27}t$$

D'où

$$E = \mathrm{vect}((22, 1, 0, 0), (-21, 0, 1, 0), (17, 0, 0, 1)) \text{ et } F = \mathrm{vect}((-\frac{25}{27}, 1, 0, 0), (\frac{19}{27}, 0, 1, 0), (\frac{-5}{27}, 0, 0, 1))$$

Donc E et F sont des espaces vectoriels au plus de dimension 3. Montrons que ces familles génératrices sont bien de rang 3. Pour cela, il suffit de calculer le rang de leur matrice représentative dans la base canonique. En notant $\mathcal{E} = ((22, 1, 0, 0), (-21, 0, 1, 0), (17, 0, 0, 1))$ et $\mathcal{F} = ((-\frac{25}{27}, 1, 0, 0), (\frac{19}{27}, 0, 1, 0), (\frac{-5}{27}, 0, 0, 1))$, on a alors

$$Mat_{\mathcal{C}}(\mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 22 & -21 & 17 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 - 22L_2 + 21L_3 - 17L_4)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftrightarrow L_1$$

La matrice $Mat_{\mathcal{C}}(\mathcal{E})$ étant de rang 3, on en déduit que $\mathcal{E}$ est de rang 3, donc $\boxed{E \text{ est de dimension 3.}}$

De même,

$$Mat_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}) = \begin{pmatrix} -\frac{25}{27} & \frac{19}{27} & -\frac{5}{27} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (L_1 \leftarrow L_1 + \frac{25}{27}L_2 - \frac{19}{27}L_3 + \frac{5}{27}L_4)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L_4 \leftrightarrow L_1$$

La matrice $Mat_{\mathcal{C}}(\mathcal{F})$ étant de rang 3, on en déduit que $\mathcal{F}$ est de rang 3, donc $\boxed{F \text{ est de dimension } 3.}$

12. D'après la question 2, la famille $B_1 = ((1,0,-4,5),(0,1,-3,5))$ est une base de E_1. De plus, $1+22\times 0-21\times(-4)-17\times 5 = 1+84-85=0$ et $1\times 0+22\times 1-21(-3)-17\times 5 = 22+63-85=0$. Donc B_1 est une famille de E. E étant un espace vectoriel, on a donc $\text{vect}(B_1)\subset E$. Autrement dit, $\boxed{E_1\subset E}$.
En raisonnant de façon similaire pour E_2 :
$$3+22\times 1-21\times 2-17(-1)=25-42+17=0, -4+22\times 0-21\times(-1)-17\times 1=0.$$
Donc $((3,1,2,-1),(-4,0,-1,1))$ est une famille de E et donc $\text{vect}((3,1,2,-1),(-4,0,-1,1))$ est inclus dans E. Autrement dit, $\boxed{E_2\subset E}$.
De même, pour F_1 :
$$27\times 2+25\times(-1)-19\times 1+5\times(-2)=54-25-19+5=0, 27\times 1+25\times 1-19\times 3+5=57-57=0.$$
Donc une famille génératrice de F_1 est une famille de F. D'où $\boxed{F_1\subset F}$.
Enfin, pour F_2 :
$$27\times 4+25\times(-3)-19\times 2+5\times 1=108-75-38+5=0, 27\times 0+25\times(-4)-19\times(-5)+5=-100+95+5=0.$$
Donc une famille génératrice de F_2 est une famille génératrice de F. D'où $\boxed{F_2\subset F}$.

13. On pose $V_2 = E\cap F$.
   (a) Montrons que V_2 est bien un plan vectoriel. Soit $(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4$. (x,y,z,t) est un élément de $E\cap F$ si et seulement si
$$\left\{\begin{array}{rcl} x+22y-21z-17t & = & 0\\ 27x+25y-19z+5t & = & 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x+22y-21z-17t & = & 0\\ -569y+592z+459t & = & 0\end{array}\right. \quad L_2\leftarrow L_2-27L_1$$
   Il en résulte qu'il existe $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ tel que
$$V_2=\text{vect}((a,b,1,0),(c,d,0,1)).$$
   Donc V_2 est au plus de dimension 2. Montrons que la famille $((a,b,1,0),(c,d,0,1))$ est libre. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que
$$\lambda(a,b,1,0)+\mu(c,d,0,1)=(0,0,0,0)$$
   D'où, en regardant la troisième et la quatrième composantes : $\lambda=\mu=0$.
   La famille $((a,b,1,0),(c,d,0,1))$ est donc libre. Elle est aussi génératrice de V_2, il en résulte que :
   $\boxed{V_2 \text{ est bien un plan vectoriel}}$.
   (b) Soient H un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathbb{R}^4$ et soient P et Q deux plans vectoriels différents. On suppose que $P\subset H$ et $Q\subset H$ et on note (p_1,p_2) une base de P et (q_1,q_2) une base de Q.
      i. P étant de dimension 2, on a $P\cap Q$ au plus de dimension 2. Or P et Q sont différents. Donc $P\cap Q$ est strictement inclus dans P. Donc $\boxed{\dim(P\cap Q)\leq 1}$.
      ii. Supposons que ni (p_1,p_2,q_1) ni (p_1,p_2,q_2) ne sont des bases de H. Il en résulte alors que ces deux familles sont liées. Autrement dit, il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ et $(\mu_1,\mu_2,\mu_3)\in\mathbb{R}^3\backslash\{(0,0,0)\}$ tels que
$$\lambda_1p_1+\lambda_2p_2+\lambda_3q_1=0_{\mathbb{R}^4}, \mu p_1+\mu_2p_2+\mu_3q_2=0_{\mathbb{R}^4}.$$
      Or (p_1,p_2) étant une base elle est en particulier libre. Donc nécessairement, $\lambda_3\neq 0, \mu_3\neq 0$. D'où
$$q_1=-\frac{\lambda_1}{\lambda_3}p_1-\frac{\lambda_2}{\lambda_3}p_2$$
      et
$$q_2=-\frac{\mu_1}{\mu_3}p_1-\frac{\mu_2}{\mu_3}p_2.$$
      Donc (q_1,q_2) est une famille de P. Or (q_1,q_2) étant une base de Q, elle est en particulier libre. Or $\text{Card}((q_1,q_2))=\dim(P)$. Donc c'est une base de P. Mais c'est aussi une base de Q. D'où $P=Q$, ce qui contredit les hypothèses initiales.
      $\boxed{\text{En conclusion, } (p_1,p_2,q_1) \text{ ou } (p_1,p_2,q_2) \text{ est une base de } H.}$

iii. Par définition, q_2 est un élément de Q. Or Q est inclus dans H. Donc q_2 est un élément de H. (p_1, p_2, q_1) étant une base de H, il existe $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$q_2 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 q_1.$$

D'où

$$q_2 - \alpha_3 q_1 = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2.$$

En posant $\lambda = -\alpha_3 q_1$, le vecteur $q_2 + \lambda q_1$ est clairement un élément de Q. De plus, $q_2 + \lambda q_1$ est égal à $\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2$ qui est un élément de P.

$\boxed{\text{Donc } q_2 + \lambda q_1 \text{ est un élément de } P \cap Q.}$

iv. On sait que $q_2 + \lambda q_1$ est un élément de $P \cap Q$. De plus,(q_1, q_2) étant une base de Q, $q_2 + \lambda q_1$ est un élément non nul. Donc $(q_2 + \lambda q_1)$ est une famille libre de $P \cap Q$. D'où $\dim(P \cap Q) \geq 1$. Mais on a vu que $\dim(P \cap Q) \leq 1$.

$\boxed{\text{Par conséquent, } \dim(P \cap Q) = 1.}$

(c) On a vu que V_2, E_1 et E_2 sont des plans vectoriels inclus dans E qui est de dimension 3. De plus, e est un élément de $E_1 \cap E_2$ mais n'est pas un élément de F. Donc e n'est pas un élément de V_2. Ainsi, V_2 est différent de E_1 et de E_2.

En appliquant le résultat de la question 13.b.iv, on en déduit que

$$\underline{\dim(V_2 \cap E_1) = 1, \dim(V_2 \cap E_2) = 1.}$$

De même, V_2, F_1, F_2 sont des plans vectoriels inclus dans F qui est de dimension 3. Et f est un élément de $F_1 \cap F_2$ mais n'est pas un élément de E. Donc f n'est pas un élément de V_2. Ainsi, V_2 est différent de F_1 et de F_2. En appliquant le résultat de la question 13.b.iv, on en déduit que

$$\underline{\dim(V_2 \cap F_1) = 1, \dim(V_2 \cap F_2) = 1.}$$

$\boxed{\text{En conclusion, } V_2 \text{ vérifie bien (SC).}}$

Partie 3 : analyse du problème

On garde les notations introduites dans la partie 2.

Soit V un plan vectoriel vérifiant (SC). On veut montrer que $V = V_1$ ou $V = V_2$.

14. Justifier qu'il existe v_1, v_2, w_1, w_2 des éléments de $\mathbb{R}^4 \backslash \{0_{\mathbb{R}^4}\}$ tels que

$$\text{vect}(v_1) = V \cap E_1, \text{vect}(v_2) = V \cap E_2, \text{vect}(w_1) = V \cap F_1, \text{vect}(w_2) = V \cap F_2.$$

15. Montrer que $\text{vect}(v_1, v_2) \subset V \cap E$ et $\text{vect}(w_1, w_2) \subset V \cap F$.
16. (**INFO**) Écrire une fonction Python `est_libre(L,M)` qui prend en arguments deux listes L, M de réels de longueur 4 et qui renvoie `True` si $((L[0], L[1], L[2], L[3]), (M[0], M[1], M[2], M[3]))$ est une famille libre et `False` sinon.
17. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
    (a) (v_1, v_2) est liée,
    (b) e est un élément de V,
    (c) V n'est pas inclus dans F,
    (d) (w_1, w_2) est liée,
    (e) f est un élément de V,
    (f) V n'est pas inclus dans E.
18. En déduire que (v_1, v_2) est une base de V si et seulement si (w_1, w_2) est une base de V.
19. Déduire des questions précédentes que $V = V_1$ ou $V = V_2$.

Correction

14. Les différentes intersections étant de dimension 1, elles admettent donc des bases de cardinal 1. Il existe donc v_1, v_2, w_1, w_2 des vecteurs non nuls de $\mathbb{R}^4$ tels que :

$$\mathrm{vect}(v_1) = V \cap E_1, \mathrm{vect}(v_2) = V \cap E_2, \mathrm{vect}(w_1) = V \cap F_1, \mathrm{vect}(w_2) = V \cap F_2.$$

15. Par définition, v_1 est un élément de E_1 et v_2 est un élément de E_2. Or E_1 et E_2 sont inclus dans E. Donc v_1 et v_2 sont des éléments de E. D'où $\underline{\mathrm{vect}(v_1, v_2) \text{ est inclus dans } E}$. De plus, par définition v_1 et v_2 sont des éléments de V. Donc $\underline{\mathrm{vect}(v_1, v_2) \text{ est inclus dans } V}$. D'où $\boxed{\mathrm{vect}(v_1, v_2) \text{ est inclus dans } V \cap E.}$
De même, en remplaçant v_i par w_i, E_i par F_i et E par F dans le raisonnement précédent, on en déduit que $\boxed{\mathrm{vect}(w_1, w_2) \text{ est inclus dans } V \cap F.}$

16. Écrivons d'abord une fonction qui vérifie si une liste représente le vecteur nul :

```
def nul (L) :
  if len(L)==4 :
def nul (L) :
```

Voici la fonction est_libre :

```
def est_libre(L,M) :
    if len(L)==4 and len(M)==4 :
        if nul(L) or nul(M) :
            return False
        else :
            lam=0
            indiceL=0
            mu=0
            indiceM=0
            for i in range(4) :
                if L[i]!=0 :
                    indiceL=i
                    lam=L[i]
                if M[i]!=0 :
                    indiceM=i
                    mu=M[i]
            if indiceM!=indiceL :
                return True
            for i in range(4) :
                if mu*L[i]!=lam*M[i] :
                    return True
            return False
```

17. Pour montrer que ces propositions sont équivalentes, on montre qu'une proposition donnée implique la suivante, et que la dernière implique la première.
$(a \Rightarrow b)$ Supposons que (v_1, v_2) est une famille liée. Ces deux vecteurs n'étant pas nuls, il en résulte que $\mathrm{vect}(v_1) = \mathrm{vect}(v_2)$. D'où $V \cap E_1 = V \cap E_2$. Or $V \cap E_1$ est de dimension 1. Donc v_1 est un élément de $V \cap E_1$ et de $V \cap E_2$. D'où v_1 est un élément non nul de $E_1 \cap E_2 = \mathrm{vect}(e)$. Donc $\mathrm{vect}(e) = \mathrm{vect}(v_1)$. Il en résulte que e est un élément $V \cap E_1$ et donc de V.
$(b \Rightarrow c)$ Supposons que e est un élément de V. Comme e n'est pas un élément de F, on en déduit que V n'est pas inclus dans F.
On montre $(c) \Rightarrow (d)$ par la contraposée. Supposons que (w_1, w_2) est libre. Il s'agit alors d'une famille libre de V qui est de dimension 2. Donc (w_1, w_2) est une base de V. Donc $V = \mathrm{vect}(w_1, w_2)$. Or d'après la question 15, $\mathrm{vect}(w_1, w_2)$ est inclus dans F. Il en résulte que V est inclus dans F.

$(d \Rightarrow e)$ Supposons que $((w_1, w_2)$ est liée. En raisonnant de la même façon que $a \Rightarrow b$ (on remplace e par f, v_i par w_i et E_i par F_i), on en déduit que $\mathrm{vect}(f) = \mathrm{vect}(w_1) = \mathrm{vect}(w_2)$. Comme $\mathrm{vect}(w_1) \subset V$, on en conclut que f est un élément de V.

$(e \Rightarrow f)$ Supposons que f est un élément de V. Comme f n'est pas un élément de E, on en déduit que V n'est pas inclus dans E.

On montre $(f) \Rightarrow (a)$ par la contraposée. En raisonnant de la même façon que pour $(c) \Rightarrow (d)$ (on remplace w_i par v_i et F par E), on en déduit que $V = \mathrm{vect}(v_1, v_2) \subset E$.

18. De l'équivalence entre (a) et (d), on en déduit que

$$(v_1, v_2) \text{ est libre si et seulement si } (w_1, w_2) \text{ est libre.}$$

Mais ces familles de V ont le même cardinal que la dimension de V, à savoir 2. Elles sont donc libres si et seulement si ce sont des bases. D'où

$$\boxed{(v_1, v_2) \text{ est une base de } V \text{ si et seulement si } (w_1, w_2) \text{ est une base de } V.}$$

19. Deux cas peuvent alors se présenter.
    - Cas 1 : (v_1, v_2) est une base de V.
      Donc (w_1, w_2) est aussi une base de V. Il en résulte alors que $V = \mathrm{vect}(v_1, v_2) \subset E$ et $V = \mathrm{vect}(w_1, w_2) \subset F$. Donc F est inclus dans $E \cap F = V_2$ qui est également de dimension 2. Donc $\boxed{V = V_2}$.
    - Cas 2 : (v_1, v_2) est liée.
      D'après les différentes équivalences, on en déduit que e et f sont des éléments de V. Donc $V_1 = \mathrm{vect}(e, f) \subset V$. Or V_1 et V ont la même dimension. Donc $\boxed{V = V_1}$.

Corrigé du DS n$^{\text{o}}$ 7 de mathématiques et d'informatique

Problème 2

Ce problème présente une méthode numérique, appelée méthode des trapèzes, permettant de calculer des approximations de la valeur d'une intégrale. Les parties 1 et 2 détaillent cette méthode alors que la partie 3 propose de l'appliquer sur un exemple et de l'implémenter en Python. Seuls les résultats encadrés (qu'on peut admettre si besoin) sont utilisés d'une partie à l'autre.

Partie 1 - Une première approximation

On considère une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ où $a<b$ sont deux réels fixés. On pose g la fonction affine définie par $g(a)=f(a)$ et $g(b)=f(b)$. Le but de cette partie est d'estimer l'erreur commise si on approche $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ par $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$ (qui correspond à l'aire d'un trapèze). Pour cela, on pose la fonction :

$$h : x \mapsto f(x) - g(x) - \lambda(x-a)(x-b)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante qui sera fixée à la question 3.

1. (a) *Déterminer une expression de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

► La fonction g est affine et vérifie $g(a)=f(a)$ et $g(b)=f(b)$ d'après l'énoncé. Son coefficient directeur est donc égal à $(f(b)-f(a))/(b-a)$ et $g(x)=f(a)$ si $x=a$. On en déduit que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \boxed{g(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)}.$$

On peut aussi poser la fonction affine $g : x \mapsto \alpha x + \beta$ et résoudre le système linéaire formé des deux équations $g(a)=f(a)$ et $g(b)=f(b)$ d'inconnues $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Mais cette méthode est plus longue.

(b) *En déduire que $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x = (b-a)(f(a)+f(b))/2$.*

► On a :

$$\begin{aligned}
\int_a^b g(x)\mathrm{d}x &= \int_a^b \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)\right)\mathrm{d}x \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b (x-a)\mathrm{d}x + f(a)\int_a^b \mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale}\\
&= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}-ax\right]_a^b + f(a)\Big[x\Big]_a^b\\
&= \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\left(\frac{b^2}{2}-ab-\frac{a^2}{2}+a^2\right)+f(a)\Big(b-a\Big)\\
&= \frac{f(b)-f(a)}{2(b-a)}\Big(\underbrace{b^2-2ab+a^2}_{=(b-a)^2}\Big)+f(a)\Big(b-a\Big)\\
&= \frac{f(b)-f(a)}{2}\Big(b-a\Big)+\frac{2f(a)}{2}\Big(b-a\Big) \quad \text{d'après la formule du binôme de Newton}\\
&= \Big(f(b)-f(a)+2f(a)\Big)\frac{b-a}{2}\\
&= \boxed{(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}}.
\end{aligned}$$

2. *Calculer $\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x$ et écrire le résultat sous la forme $\mu(b-a)^3$ où $\mu \in \mathbb{R}$ est une constante à déterminer.*

▶ On utilise une intégration par parties en posant les fonctions :

$$\begin{cases} u' : x \mapsto x-a \\ v : x \mapsto x-b \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} u : x \mapsto \frac{(x-a)^2}{2} \\ v' : x \mapsto 1. \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ comme fonctions polynomiales donc on a d'après la formule d'intégration par parties :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \underbrace{(x-a)(x-b)}_{=u'(x)v(x)} \mathrm{d}x &= \left[\underbrace{\frac{(x-a)^2}{2}(x-b)}_{=u(x)v(x)}\right]_a^b - \int_a^b \underbrace{\frac{(x-a)^2}{2}}_{=u(x)v'(x)} \mathrm{d}x \\
&= 0 - 0 - \frac{1}{2}\left[\frac{(x-a)^3}{3}\right]_a^b \\
&= -\frac{1}{2}\left(\frac{(b-a)^3}{3} - 0\right) \\
&= \boxed{-\frac{1}{6}(b-a)^3}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat en posant la constante $\boxed{\mu = -1/6}$.

On peut aussi calculer cette intégrale sans utiliser la formule d'intégration par parties. Par exemple en développant l'expression à intégrer :

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(x^2 - (a+b)x + ab\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + abx\right]_a^b = \dots$$

Puis on retrouve la forme demandée à l'aide de la formule du binôme de Newton.

3. *Montrer qu'on peut choisir la constante $\lambda \in \mathbb{R}$ afin que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$ Dans la suite, on fixe la constante λ de cette façon et on suppose donc que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.*

▶ On cherche une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ telle que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$. On raisonne par analyse-synthèse.

<u>Analyse</u>. On a :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0 \\
\iff &\int_a^b \Big(f(x) - g(x) - \lambda(x-a)(x-b)\Big)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{par défintion de la fonction } h \\
\iff &\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \lambda\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x = 0 \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\
\iff &\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{\lambda}{6}(b-a)^3 = 0 \quad \text{d'après les résultats précédents} \\
\iff &\frac{\lambda}{6}(b-a)^3 = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} - \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \\
\iff &\lambda = 3\frac{f(a)+f(b)}{(b-a)^2} - \frac{6}{(b-a)^3}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad \text{car } (b-a)^3 \neq 0 \text{ puisque } a < b.
\end{aligned}$$

<u>Synthèse</u>. Puisque la fonction f et les réels $a < b$ sont fixés dans l'énoncé, on peut poser la constante :

$$\boxed{\lambda = 3\frac{f(a)+f(b)}{(b-a)^2} - \frac{6}{(b-a)^3}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}.$$

En reprenant les calculs de l'analyse, on a bien que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$.

On peut aussi rédiger plus rapidement en remarquant que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$ est une équation d'inconnue $\lambda \in \mathbb{R}$ de degré 1 par définition de la fonction h et par linéarité de l'intégrale. Elle admet donc une solution qu'il est inutile de calculer pour répondre à la question.

4. *De quelle classe est la fonction h sur $[a,b]$? Justifier que la fonction h admet des primitives sur $[a,b]$. On note H une primitive de h sur $[a,b]$. Que peut-on dire des images $H(a)$ et $H(b)$?*

▶ On sait que :
— f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ d'après l'énoncé,
— g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$ comme fonction affine,
— et $x \mapsto \lambda(x-a)(x-b)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,b]$ comme fonction polynomiale.

Par conséquent, $\boxed{h : x \mapsto f(x) - g(x) - \lambda(x-a)(x-b) \text{ est de classe } \mathscr{C}^2 \text{ sur } [a,b]}$ comme somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$. En particulier, elle est continue sur $[a,b]$ donc $\boxed{h \text{ admet des primitives sur } [a,b] \text{ d'après le théorème fondamental de l'analyse}}$. De plus, on a d'après le résultat de la question précédente :

$$0 = \int_a^b h(x)\mathrm{d}x = \Big[H(x)\Big]_a^b = H(b) - H(a) \quad \text{donc} \quad \boxed{H(a) = H(b)}.$$

5. (a) *Déduire du résultat précédent qu'il existe un réel $c_0 \in]a,b[$ tel que $h(c_0) = 0$.*

▶ Puisque h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$, on en déduit que sa primitive H est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$. Par conséquent, on a :
— H est continue sur $[a,b]$,
— H est dérivable sur $]a,b[$,
— et $H(a) = H(b)$ d'après le résultat de la question précédente.

D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe un réel $c_0 \in]a,b[$ tel que $H'(c_0) = 0$ donc tel que $\boxed{h(c_0) = 0}$ car $H' = h$.

Citez précisément les hypothèses des théorèmes que vous utilisez afin de montrer que vous connaissez votre cours.

(b) *Prouver qu'il existe deux réels $(c_1, c_2) \in]a,b[^2$ tels que $c_1 < c_2$ et $h'(c_1) = h'(c_2) = 0$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} & h(a) = f(a) - g(a) - \lambda(a-a)(a-b) = f(a) - f(a) - 0 = 0 \quad \text{car } g(a) = f(a) \\ \text{et} \quad & h(b) = f(b) - g(b) - \lambda(b-a)(b-b) = f(b) - f(b) - 0 = 0 \quad \text{car } g(b) = f(b). \end{aligned}$$

Or h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ et $c_0 \in]a,b[$ d'après le résultat de la question précédente. Par conséquent, on a :
— h est continue sur $[a,c_0]$ et sur $[c_0,b]$,
— h est dérivable sur $]a,c_0[$ et sur $]c_0,b[$,
— et $h(a) = h(b) = h(c_0) = 0$ d'après le résultat de la question précédente.

D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe deux réels $c_1 \in]a,c_0[$ et $c_2 \in]c_0,b[$ tels que $\boxed{h'(c_1) = h'(c_2) = 0}$. De plus, on a $a < c_1 < c_0 < c_2 < b$ donc en particulier $\boxed{(c_1,c_2) \in]a,b[^2}$ et $\boxed{c_1 < c_2}$.

(c) *Prouver qu'il existe un réel $c \in]c_1,c_2[$ tel que $f''(c) = 2\lambda$.*

▶ On sait que h est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ et $c_1 < c_2$ appartiennent à $]a,b[$ d'après le résultat de la question précédente. Par conséquent, on a :
— h' est continue sur $[c_1,c_2]$,
— h' est dérivable sur $]c_1,c_2[$,
— et $h'(c_1) = h'(c_2) = 0$ d'après le résultat de la question précédente.

D'après le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe un réel $c \in]c_1, c_2$ tel que $h''(c) = 0$. Or on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) - \lambda(x-a)(x-b) \\ &= f(x) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)\right) - \lambda\Big(x^2 - (a+b)x + ab\Big) \\ \text{donc} \quad h'(x) &= f'(x) - \frac{f(b)-f(x)}{(b-a)} - \lambda\Big(2x - (a+b)\Big) \\ \text{donc} \quad h''(x) &= f''(x) - 2\lambda. \end{aligned}$$

On a vient de démontrer l'existence d'un réel $c \in]c_1, c_2[$ tel que $f''(c) - 2\lambda = h''(c) = 0$ donc tel que $\boxed{f''(c) = 2\lambda}$.

6. Déduire des résultats précédents que :

$$\boxed{\exists c \in [a,b], \quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(c)}.$$

► On sait que $\int_a^b h(x)\mathrm{d}x = 0$ d'après le choix de la constante λ fixée à la question 3. Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b h(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \Big(f(x) - g(x) - \lambda(x-a)(x-b)\Big)\mathrm{d}x \quad \text{par défintion de la fonction } h \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x - \lambda\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x \quad \text{par linéarité de l'intégrale} \\ &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{\lambda}{6}(b-a)^3 \quad \text{d'après les résultats des questions 1(b) et 2.} \end{aligned}$$

Or $\lambda = f''(c)/2$ d'après le résultat de la question précédente. D'où :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = -\frac{(b-a)^3}{12}f''(c)}.$$

De plus, on a $a < c_1 < c < c_2 < b$ donc en particulier $\boxed{c \in [a,b]}$

Partie 2 - La méthode des trapèzes

On considère toujours une fonction f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ où $a < b$ sont deux réels fixés. De plus, on pose un entier $n \geqslant 1$. Le principe de la méthode des trapèzes est de subdiviser l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles de même longueur sur chacun desquels on va appliquer l'approximation de la partie 1. Plus précisément, on définit $n+1$ réels notés $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ par :

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b \quad \text{et} \quad a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = \cdots = a_n - a_{n-1}$$

et on remarque que $[a,b] = [a_0,a_1] \cup [a_1,a_2] \cup \cdots \cup [a_{n-1},a_n] = \bigcup_{k=0}^{n-1}[a_k,a_{k+1}]$.

7. (a) Soit $k \in \{0,1,2,\dots,n\}$. Déterminer une expression de a_k en fonction de a, b, k et n.

► Puisque l'intervalle $[a,b]$ de longueur $b-a$ est subdivisé en n sous-intervalles de même longueur, la longueur de chacun des sous-intervalles est égale à :

$$a_1 - a_0 = a_2 - a_1 = \cdots = a_n - a_{n-1} = \tfrac{b-a}{n}.$$

Les réels $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ forment donc les $n+1$ premiers termes d'une suite arithmétique de raison $(b-a)/n$ et de premier terme $a_0 = a$. On en déduit que :

$$\boxed{\forall k \in \{0,1,2,\ldots,n\}, \quad a_k = a + k\tfrac{b-a}{n}}.$$

(b) En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\tfrac{b-a}{n}\right)\right).$$

► On a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\\
=&\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{b-a}{n}\right)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} && \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
=&\frac{b-a}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + \sum_{k=0}^{n-1} f(a_{k+1})\right) && \text{par linéarité de la somme}\\
=&\frac{b-a}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f(a_k) + \sum_{k=1}^{n} f(a_k)\right) && \text{à l'aide d'un décalage d'indice dans la deuxième somme}\\
=&\frac{b-a}{2n}\left(f(a_0) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) + \sum_{k=1}^{n-1} f(a_k) + f(a_n)\right) && \text{par associativité de la somme}\\
=&\frac{b-a}{2n}\left(f(a) + f(b) + 2\sum_{k=1}^{n-1} f(a_k)\right) && \text{car } a_0 = a \text{ et } a_n = b\\
=&\boxed{\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\tfrac{b-a}{n}\right)\right)} && \text{d'après le résultat de la question précédente.}
\end{aligned}$$

Dans la suite, on note $T_n(f)$ le membre de droite de cette égalité, c'est-à-dire :

$$\boxed{T_n(f) = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\tfrac{b-a}{n}\right)\right)}.$$

8. *(a) Justifier que la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ admet un maximum sur $[a,b]$. Dans la suite, on note M la valeur de ce maximum.*

► On sait que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ d'après l'énoncé. Donc f'' est continue sur $[a,b]$ par définition de la classe $\mathscr{C}^2$. Par conséquent, la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ est continue sur le segment $[a,b]$ par composée de fonctions continues. D'après le théorème des bornes, on en déduit qu'elle est bornée et qu'elle atteint ses bornes. En particulier, $\boxed{x \mapsto |f''(x)| \text{ admet un maximum sur } [a,b]}$.

(b) Montrer que :

$$\forall k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}, \qquad \left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^3}.$$

► Soit $k \in \{0,1,2,\ldots,n-1\}$. D'après le résulat de la question 6 de la partie 1, puisque f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur le sous-intervalle $[a_k, a_{k+1}]$, on sait qu'il existe un réel $c_k \in [a_k, a_{k+1}]$ tel que :

$$\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} = -\frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{12} f''(c_k).$$

Attention : le réel c_k appartient à l'intervalle $[a_k, a_{k+1}]$ et donc dépend de l'entier k ! Par conséquent, il est judicieux de le noté c_k et non c puisqu'il sera différent pour chaque valeur de k.

En passant à la valeur absolue, on en déduit que :

$$\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| = \left|-\frac{(a_{k+1}-a_k)^3}{12}f''(c_k)\right| = \frac{(a_{k+1}-a_k)^3\,|f''(c_k)|}{12}$$

car $a_{k+1} > a_k$. Or :

— $a_{k+1} - a_k = (b-a)/n$ d'après le résultat de la question 7(a),

— et $|f''(c_k)| \leqslant M$ d'après le résultat de la question précédente car $c_k \in [a_k, a_{k+1}] \subset [a, b]$.

On en déduit bien que :

$$\boxed{\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| \leqslant \frac{(b-a)^3M}{12n^3}}$$

et ceci est vrai pour tout $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$.

9. *Déduire des résultats précédents que :*

$$\boxed{\forall n \geqslant 1, \quad \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3M}{12n^2}}.$$

▶ On a :

$$\begin{aligned}
&\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\\
&= \int_{a_0}^{a_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a_1}^{a_2} f(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\mathrm{d}x - T_n(f) \quad \text{d'après la relation de Chasles}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2} \quad \text{d'après le résultat de la question 7(b)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right) \quad \text{par linéarité de la somme.}
\end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient en passant à la valeur absolue :

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right|\\
&= \left|\sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right)\right|\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\left|\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)\mathrm{d}x - (a_{k+1}-a_k)\frac{f(a_k)+f(a_{k+1})}{2}\right| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire}\\
&\leqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(b-a)^3M}{12n^3} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente}\\
&= n\frac{(b-a)^3M}{12n^3} = \frac{(b-a)^3M}{12n^2}.
\end{aligned}$$

L'inégalité triangulaire est la principale justification de ce calcul. Elle doit être citée explicitement.

Finalement, on a bien montré que

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}}$$

et ceci est vrai pour tout entier $n \geqslant 1$.

10. *Quelle est la limite de $T_n(f)$ quand n tend vers $+\infty$?*

▶ On a :

$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| \leqslant \frac{(b-a)^3 M}{12n^2}$$

d'après le résultat de la question précédente et la définition de la valeur absolue. Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(b-a)^3 M}{12n^2} = 0.$$

D'après le théorème de la limite par encadrement, on en déduit que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - T_n(f)\right| = 0 \quad \text{par conséquent} \quad \boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n(f) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}.$$

Partie 3 - Application numérique

Dans cette partie, on propose d'appliquer la méthode des trapèzes pour approcher la valeur de $\int_0^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$. On pose donc la fonction $f : x \mapsto \exp(-x^2)$.

11. (a) *De quelle classe est la fonction f sur $\mathbb{R}$?*

▶ La fonction $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$ comme composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

(b) *Prouver que pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe un polynôme $P_k \in \mathbb{R}[X]$ tel que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}.$$

▶ On raisonne par récurrence.

Initialisation. Pour $k = 0$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(0)}(x) = f(x) = e^{-x^2} = P_0(x)e^{-x^2} \quad \text{en posant } \boxed{P_0 = 1}.$$

P_0 est bien un polynôme à coefficients réels.

Hérédité. On fixe un entier $k \geqslant 0$ et on suppose qu'il existe un polynôme P_k à coefficients réels tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)})'(x) \\ &= P_k'(x)e^{-x^2} + P_k(x)\Big(-2xe^{-x^2}\Big) \\ &= \Big(\underbrace{P_k'(x) - 2xP_k(x)}_{=P_{k+1}(x)}\Big)e^{-x^2} \\ &= P_{k+1}(x)e^{-x^2} \quad \text{en posant } \boxed{P_{k+1} = P_k' - 2XP_k}.\end{aligned}$$

P_{k+1} est bien un polynôme à coefficients réels comme somme et produit de polynômes à coefficients réels.

N'oubliez pas de justifier que les polynômes que vous posez sont bien des polynômes à coefficients réels.

Conclusion. D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall k \geqslant 0, \quad \exists P_k \in \mathbb{R}[X], \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(k)}(x) = P_k(x)e^{-x^2}}.$$

(c) *Calculer P_0, P_1, P_2 et P_3.*

▶ En reprenant les calculs du raisonnement de la question précédente, on obtient :

$$\begin{aligned} & P_0 = \boxed{1}, \\ & P_1 = P_0' - 2XP_0 = 0 - 2X = \boxed{-2X}, \\ & P_2 = P_1' - 2XP_1 = -2 - 2X(-2X) = \boxed{4X^2 - 2}, \\ \text{et} \quad & P_3 = P_2' - 2XP_2 = 8X - 2X(4X^2 - 2) = \boxed{-8X^3 + 12X}. \end{aligned}$$

Pensez à utiliser vos calculs précédents pour gagner du temps. Il est beaucoup plus long de dériver trois fois la fonction f et de factoriser chaque dérivée par e^{-x^2}.

12. *Montrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ sur $[0,1]$ est égal à $M = 2$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad (f'')'(x) &= f^{(3)}(x) \quad \text{par défintion de } f^{(3)} \\ &= P_3(x)e^{-x^2} \quad \text{d'après le résultat de la question 11(b)} \\ &= (-8x^3 + 12x)e^{-x^2} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\ &= -8x(x^2 - \tfrac{3}{2})e^{-x^2} = -8x\left(x - \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right)e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Puisque $-\sqrt{\frac{3}{2}} < 0 < 1 < \sqrt{\frac{3}{2}}$, on en déduit le tableau des variations de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		0		1		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$(f'')'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$			0	$-$	
$f''(x)$		↗		↘	-2	↗	$\frac{2}{e}$	↗		↘	

car $f''(0) = P_2(0)e^{-0^2} = -2$ et $f''(1) = P_2(1)e^{-1^2} = (4-2)e^{-1} = 2/e$.

Inutile de perdre du temps à calculer les autres valeurs qui apparaissent dans le tableau de variations, elles ne serviront à rien ensuite puisque l'énoncé considère seulement f'' sur $[0,1]$. On peut même retreindre le tableau des variations au segment $[0,1]$.

Ainsi $f''(x)$ prend toutes les valeurs de -2 à $2/e$ lorsque $x \in [0,1]$. En passant, à la valeur absolue, on en déduit que $|f''(x)|$ prend toutes les valeurs de 0 à 2 lorsque $x \in [0,1]$ car $2/e < 2$ (puisque $e = \exp(1) > \exp(0) = 1$ par stricte croissance de la fonction exponentielle). Par conséquent, le maximum de la fonction $x \mapsto |f''(x)|$ sur $[0,1]$ est égal à $\boxed{M = 2}$.

13. ***Informatique.*** *On écrira les fonctions demandées en Python et on utilisera la fonction* `exp` *de la bibliothèque* `numpy`.

(a) *Écrire une fonction* `f(x)` *qui prend en argument un réel x et renvoie la valeur de e^{-x^2}.*

▶ Par exemple :

```
import numpy as np
    def f(x):
    return np.exp(-x**2)
```

(b) *Écrire une fonction* `T(n,a,b)` *qui prend en argument un entier $n \geqslant 1$ et deux réels $a < b$ puis qui renvoie la valeur de $T_n(f)$.*

▶ Par exemple :

```
def T(n,a,b):
    S=0
    for k in range(1,n):
        S=S+f(a+k*(b-a)/n)
    return ((b-a)/n)*((f(a)+f(b))/2+S)
```

Attention à la fonction `range` *en Python : l'instruction* `range(1,n)` *représente tous les entiers allant de 1 à $n-1$ alors que l'instruction* `range(1,n-1)` *représente tous les entiers allant de 1 à $n-2$.*

(c) *Écrire une fonction* `approx(epsilon)` *qui prend un argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoie une approximation de la valeur de $\int_0^1 e^{-x^2} \mathrm{d}x$ à ε près.*

▶ D'après le résultat de la question 9 de la partie 2, on sait que, pour tout $n \geqslant 1$, la valeur de $T(n)(f)$ est une approximation de la valeur de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ à $(b-a)^3 M/(12n^2)$ près. Dans l'exemple de cette partie, on a $a = 0$, $b = 1$ et $M = 2$. Il suffit donc de choisir un entier $n \geqslant 1$ tel que :

$$\frac{(b-a)^3 M}{12n^2} \leqslant \varepsilon \iff \frac{(1-0)^3 \times 2}{12n^2} \leqslant \varepsilon \iff \frac{1}{6n^2} \leqslant \varepsilon$$

pour que $T_n(f)$ soit une approximation de la valeur de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ à ε près. En Python, on peut par exemple écrire :

```
def approx(epsilon):
    n=1
    while 1/(6*n**2)>epsilon:
        n=n+1
    return T(n,0,1)
```

On peut également résoudre l'inéquation $\frac{1}{6n^2} \leqslant \varepsilon \iff n \geqslant \sqrt{1/(6\varepsilon)}$. Il suffit donc de choisir pour valeur de n l'entier $\lfloor \sqrt{1/(6\varepsilon)} \rfloor + 1$. N'oubliez pas la partie entière ! Ce qui donne en Python :

```
import numpy as np
def approx(epsilon):
    n=int(np.sqrt(1/(6*epsilon)))+1
    return T(n,0,1)
```