DS 8 mathématiques

BCPST 1 2018-2019

— Durée : 2 heures.

— Documents et calculatrice non autorisés.

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Soient a, b, c trois réels. Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $p_k = a^k + b^k + c^k$. On définit également :

$$e_1 = a + b + c, e_2 = ab + ac + bc, e_3 = abc.$$

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode permettant de calculer tous les p_k en supposant connus p_1, p_2, p_3, sans pour autant connaître les valeurs de a, b, c.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(1 + at)(1 + bt)(1 + ct) = 1 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3$.
2. En déduire que pour tout $n \geq 1$ et pour tout t assez proche de 0, on a

$$\ln(1 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} p_k}{k} t^k + o_{t \to 0}(t^n).$$

3. Montrer que pour tout t assez proche de 0, on a : $\exp(p_1 t - \frac{p_2}{2} t^2 + \frac{p_3}{3} t^3) = 1 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3 + o_{t \to 0}(t^3)$.
4. À l'aide d'un développement limité, montrer que $e_2 = \frac{p_1^2 - p_2}{2}, e_3 = \frac{p_1^3 - 3p_1 p_2 + 2p_3}{6}$.
5. On suppose que $p_1 = 1, p_2 = 2, p_3 = 3$.
   (a) Déterminer $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout t assez proche de 0,

$$\exp(p_1 t - \frac{p_2}{2} t^2 + \frac{p_3}{3} t^3) = 1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + o_{t \to 0}(t^3).$$

   (b) Calculer un développement limité à l'ordre 5 en 0 de $t \mapsto \ln(1 + \alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3)$. En déduire la valeur de p_5.
6. (INFO) On revient au cas général.
   On aimerait écrire une fonction `somme_puissance(p1,p2,p3,n)` qui prend en arguments trois réels p_1, p_2, p_3 définis comme précédemment et un entier naturel $n \geq 4$ et qui renvoie la liste des valeurs $[0, p_1, p_2, \cdots, p_n]$.
   Pour cela, on aura besoin de fonctions auxiliaires permettant de manipuler les polynômes en Python. Dans la suite, on représente en python un polynôme par une liste de ces coefficients. Par exemple, si $P = 3+2X^2-5X^4$, une liste qui représente P est représenté par $L = [3, 0, 2, 0, -5]$. Remarquons que P est aussi représenté par $L = [3, 0, 2, 0, -5, 0, 0]$.
   (a) La première fonction qui nous est nécessaire, est une fonction qui permet de calculer le produit de deux polynômes. On aimerait donc écrire une fonction `produit(L,M)` qui prend en arguments deux listes L, M représentant respectivement deux polynômes P, Q et qui renvoie une liste R qui représente le produit de polynômes PQ. Parmi les fonctions `produit(L,M)` suivantes, sans justification, laquelle effectue bien ce qui est demandé ?

1.
```
def produit(L,M) :
    N=[0 for i in range(len(L)+len(M))]
    for i in range(len(L)+len(M)) :
        N[i]=N[i]+L[i]*M[i]
    return N
```

2.
```
def produit(L,M) :
    N=[0 for i in range(len(L)+len(M)-1)]
    for i in range(len(L)) :
        for j in range(len(M)) :
            N[i]=N[i]+M[i]*L[j]
    return N
```

3.
```
def produit(L,M) :
    N=[0 for i in range(len(L)+len(M)-1)]
    for i in range(len(L)) :
        for j in range(len(M)) :
            N[i+j]=N[i+j]+L[i]*M[j]
    return N
```

4.
```
def produit(L,M) :
   N=[0 for i in range(len(L)+len(M)-1)]
   for i in range(len(L)) :
      for j in range(len(M)) :
         N[i+j]=L[i]*M[j]
   return N
```

(b) À aide de la fonction `produit`, écrire une fonction `puissance(L,k)` qui prend en arguments une liste L représentant un polynôme P et un entier $k \geq 0$ et qui renvoie une liste M représentant le polynôme P^k.

(c) Écrire une fonction `p_vers_e(p1,p2,p3)` qui prend en arguments trois réels p_1, p_2, p_3 et qui renvoie la liste $[e_1, e_2, e_3]$, où $p_1, p_2, p_3, e_1, e_2, e_3$ sont les valeurs définies initialement.

(d) On suppose que l'on dispose d'une fonction `DL_ln_bla(p1,p2,p3,n)` qui prend en arguments trois réels p_1, p_2, p_3 et un entier naturel n et qui renvoie une liste L qui est la liste des coefficients du développement limité en 0 à l'ordre n de $x \mapsto \ln(1 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3)$ où e_1, e_2, e_3 sont définis comme initialement. En déduire une fonction `somme_puissance(p1,p2,p3,n)` qui prend en arguments trois réels p_1, p_2, p_3 et un entier $n \geq 4$ et qui renvoie la liste $[0, p_1, p_2, \cdots, p_n]$.

Correction

Soient a, b, c trois réels. Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $p_k = a^k + b^k + c^k$. On définit également :

$$e_1 = a + b + c, e_2 = ab + ab + bc, e_3 = abc.$$

L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode permettant de calculer tous les p_k en supposant connus p_1, p_2, p_3, sans pour autant connaître les valeurs de a, b, c.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Développons $(1 + at)(1 + bt)(1 + ct)$. On a

$$\begin{aligned}(1 + at)(1 + bt)(1 + ct) &= (1 + at + bt + abt^2)(1 + ct) \\ &= 1 + at + bt + abt^2 + ct + cat^2 + bct^2 + abct^3 \\ &= 1 + (a + b + c)t + (ab + ca + bc)t^2 + (abc)t^3 \\ &= \underline{1 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3}.\end{aligned}$$

2. Soit $n \geq 1$. Soit t assez proche de 0 de sorte que $(1 + at) > 0, (1 + bt) > 0, (1 + ct) > 0$. D'après la question 1, on a

$$1 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3 = (1 + at)(1 + bt)(1 + ct)$$

En passant au logarithme et par stricte positivité de $(1 + at) > 0, (1 + bt) > 0, (1 + ct) > 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\ln(1 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3) &= \ln((1 + at)(1 + bt)(1 + ct)) \\ &= \ln(1 + at) + \ln(1 + bt) + \ln(1 + ct) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} a^k t^k}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} b^k t^k}{k} + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} c^k t^k}{k} + o_{t \to 0}(t^n) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\frac{a^k + b^k + c^k}{k}\right) t^k + o_{t \to 0}(t^n) \\ &= \underline{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{p_k}{k} t^k + o_{t \to 0}(t^n)}.\end{aligned}$$

3. Soit t assez proche de 0, pour $n = 3$ dans la question 2, on a :

$$\ln(1 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3) = p_1 t - \frac{p_2}{2} t^2 + \frac{p_3}{3} t^3 + o_{t \to 0}(t^3).$$

Autrement dit,

$$\ln(1 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3) - p_1 t + \frac{p_2}{2} t^2 - \frac{p_3}{3} t^3 = o_{t \to 0}(t^3).$$

D'où

$$\exp(\ln(1 + e_1 t + e_2 t^2 + e_3 t^3) - p_1 t + \frac{p_2}{2} t^2 - \frac{p_3}{3} t^3) = \exp(o_{t \to 0}(t^3)).$$

Donc
$$(1+e_1t+e_2t^2+e_3t^3)\exp(-p_1t+\frac{p_2}{2}t^2-\frac{p_3}{3}t^3)=1+o_{t\to 0}(t^3)$$
D'où
$$(1+e_1t+e_2t^2+e_3t^3)=\exp(p_1t-\frac{p_2}{2}t^2+\frac{p_3}{3}t^3)+o_{t\to 0}(t^3)$$
Autrement dit,
$$\boxed{(1+e_1t+e_2t^2+e_3t^3)+o_{t\to 0}(t^3)=\exp(p_1t-\frac{p_2}{2}t^2+\frac{p_3}{3}t^3).}$$

4. Lorsque t tend vers 0, $p_1t-\frac{p_2}{2}t^2+\frac{p_3}{3}t^3$ tend vers 0. Effectuons le développement limité à l'ordre 3 en 0 de $\exp(p_1t-\frac{p_2}{2}t^2+\frac{p_3}{3}t^3)$. On a :
$$\exp(p_1t-\frac{p_2}{2}t^2+\frac{p_3}{3}t^3)=1+(p_1t-\frac{p_2}{2}t^2+\frac{p_3}{3}t^3)+\frac{(p_1t-\frac{p_2}{2}t^2+\frac{p_3}{3}t^3)^2}{2}+\frac{(p_1t-\frac{p_2}{2}t^2+\frac{p_3}{3}t^3)^3}{6}+o_{t\to 0}(t^3)$$
En développant et en gardant les termes de degré au plus 3, on obtient
$$\exp(p_1t-\frac{p_2}{2}t^2+\frac{p_3}{3}t^3)=1+(p_1t-\frac{p_2}{2}t^2+\frac{p_3}{3}t^3)+(\frac{p_1^2}{2}t^2-\frac{p_1p_2}{2}t^3)+\frac{p_1^3}{6}t^3+o_{t\to 0}(t^3).$$
En regroupant par puissances identiques de t :
$$\exp(p_1t-\frac{p_2}{2}t^2+\frac{p_3}{3}t^3)=1+p_1t+(\frac{p_1^2-p_2}{2})t^2+\frac{p_1^3-3p_1p_2+2p_3}{6}t^3+o_{t\to 0}(t^3).$$
D'après la question 3 et par unicité du développement limité à l'ordre 3 en 0, on en déduit que
$$\boxed{e_1=p_1, e_2=\frac{p_1^2-p_2}{2}, e_3=\frac{p_1^3-3p_1p_2+2p_3}{6}.}$$

5. On suppose que $p_1=1, p_2=2, p_3=3$.
   (a) D'après la question 3, on sait que
$$\exp(p_1t-\frac{p_2}{2}t^2+\frac{p_3}{3}t^3)=1+e_1t+e_2t^2+e_3t^3+o_{t\to 0}(t^3).$$
   et d'après la question 4, $e_1=p_1, e_2=\frac{p_1^2-p_2}{2}, e_3=\frac{p_1^3-3p_1p_2+2p_3}{6}$. D'où, en remplaçant :
$$e_1=1, e_2=\frac{1-2}{2}=-\frac{1}{2}, e_3=\frac{1-3\cdot 1\cdot 2+2\cdot 3}{6})=\frac{1}{6}$$
   Autrement dit, $\boxed{\alpha=1, \beta=\frac{-1}{2}, \gamma=\frac{1}{6}.}$
   (b) On a
$$\begin{aligned}\ln(1+t-\tfrac{1}{2}t^2+\tfrac{1}{6}t^3) &= t-\tfrac{1}{2}t^2+\tfrac{1}{6}t^3-\tfrac{1}{2}(t-\tfrac{1}{2}t^2+\tfrac{1}{6}t^3)^2\\ &\quad+\tfrac{1}{3}(t-\tfrac{1}{2}t^2+\tfrac{1}{6}t^3)^3-\tfrac{1}{4}(t-\tfrac{1}{2}t^2+\tfrac{1}{6}t^3)^4+\tfrac{1}{5}(t-\tfrac{1}{2}t^2+\tfrac{1}{6}t^3)^5+o_{t\to 0}(t^5)\end{aligned}$$
   En gardant tous les termes de degré au plus 5 après simplification, on obtient
$$\boxed{\ln(1+t-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}t^3)=t-t^2+t^3-\frac{25}{24}t^4+\frac{6}{5}t^5+o_{t\to 0}(t^5).}$$
   D'après la question 2 et par unicité d'un développement limité, on en déduit que $\frac{p_5}{5}=\frac{6}{5}$. D'où $\boxed{p_5=6}$.

6. (a) La fonction 3 fait ce qui est demandé.
   (b)
```
def puissance(L,k) :
    B=[L[i] for i in range(len(L))]
    for k in range(1,k) :
        B=produit(L,B)
    return B
```

(c)
```
def p_vers_e(p1,p2,p3) :
    return [p1,(p1*p1 - 2*p2)/2,(p1**3 -3*p1*p2 +2*p3)/6]
```

(d) On a :

```
def somme_puissance(p1,p2,p3,n) :
    L=DL_ln_bla(p1,p2,p3,n)
    for k in range(1,len(L)) :
        L[k]=(-1)**(k-1)*L[k]/k
    return L
```

Exercice 2.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p un réel de $]0;1[$ et on pose $q = 1 - p$.
On dispose d'une pièce donnant "Pile" avec la probabilité p et "Face" avec la probabilité q.
On lance cette pièce et on arrête les lancers dans l'une des deux situations suivantes :

— soit l'on a obtenu "Pile",

— Soit l'on a obtenu n fois "Face".

Pour tout entier naturel k non nul, on note P_k (respectivement F_k) l'événement ≪ on obtient "Pile" (respectivement "Face") au k^{e} lancer ≫.
On note T_n le nombre de lancers effectués, X_n le nombre de "Pile" obtenus et enfin Y_n le nombre de "Face" obtenus.
On admet que T_n, X_n et Y_n sont des variables aléatoires toutes les trois définies sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; P)$ que l'on ne cherchera pas à préciser.

1. Loi de T_n.
   (a) Pour tout k de $[\![1; n-1]\!]$, déterminer, en distinguant le cas $k = 1$, la probabilité $P(T_n = k)$.
   (b) Déterminer $P(T_n = n)$.
   (c) Vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1$.
   (d) Montrer que $E(T_n) = \dfrac{1-q^n}{1-q}$.
2. Loi de X_n.
   (a) Donner la loi de X_n.
   (b) Vérifier que $E(X_n) = 1 - q^n$.
3. Loi de Y_n.
   (a) Déterminer, pour tout k de $[\![0; n-1]\!]$, la probabilité $P(Y_n = k)$.
   (b) Déterminer $P(Y_n = n)$.
   (c) Écrire une égalité liant les variables aléatoires T_n, X_n et Y_n, puis en déduire $E(Y_n)$.
4. (INFO)
   Écrire une fonction `alea(p,n)` qui prend en arguments un réel $p \in]0,1[$ et un entier $n \geq 1$ et qui renvoie la liste $[T_n, X_n, Y_n]$ où T_n, X_n, Y_n sont définies comme précédemment. On calculera T_n, X_n, Y_n pour la même expérience.

Correction

1. (a) Soit $k \in [|1, n-1|]$.
   — Cas 1 : $k = 1$.
   L'événement $(T_n = k)$ est alors l'événement "le premier lancer est pile". Donc $(T_n = k) = P_1$. D'où $\underline{P(T_n = k) = P(P_1) = p}$.

— Cas 2 : $2 \leq k \leq n-1$.
On a alors
$$(T_n = k) = \left(\cap_{j=1}^{k-1} F_j\right) \cap P_k.$$
D'après la formule des probabilités composées, on obtient :
$$P(T_n = k) = \prod_{i=1}^{k-1} P(F_i | \cap j = 1^{i-1} F_j) \times P(P_k | \cap_{i=1}^{k-1} F_i).$$
Par hypothèses sur les lancers,
$$\forall i \in [|1, k-1|], P(F_i | \cap j = 1^{i-1} F_j) = q$$
et $P(P_k | \cap_{i=1}^{k-1} F_i) = p$.
D'où
$$\boxed{P(T_n = k) = q^{k-1} p.}$$

(b) On a $(T_n = n) = \left(\cap_{j=1}^{n-1} F_j\right)$. Donc, avec la formule des probabilités composées, on obtient
$$P(T_n = n) = \prod_{i=1}^{n-1} P(F_i | \cap j = 1^{i-1} F_j)$$
Par hypothèses sur les lancers,
$$\forall i \in [|1, n-1|], P(F_i | \cap j = 1^{i-1} F_j) = q.$$
D'où $\boxed{P(T_n = n) = q^{n-1}}$.

(c) On a
$$\begin{array}{rcl} \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) & = & \sum_{k=1}^{n-1} P(T_n = k) + P(T_n = n) \\ &) & \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1} p + q^{n-1} \end{array}$$
Or $q \neq 1$. D'où
$$\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = p \frac{1 - q^{n-1}}{1 - q} + q^{n-1}.$$
Mais $p = 1 - q$. D'où
$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) = 1 - q^{n-1} + q^{n-1} = 1}.$$

(d) On a
$$\begin{array}{rcl} E(T_n) & = & \sum_{k=1}^{n} P(T_n = k) k \\ & = & \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1} pk + nq^{n-1} \\ & = & \sum_{k=1}^{n-1} q^{k-1}(1-q)k + nq^{n-1} \\ & = & \sum_{k=1}^{n-1} kq^{k-1} - \sum_{k=1}^{n-1} kq^k + nq^{n-1} \end{array}$$
En posant $l = k - 1$ dans la première somme, on obtient
$$E(T_n) = \sum_{l=0}^{n-2} (l+1) q^l - \sum_{k=1}^{n-1} kq^k + nq^{n-1}$$
En rajoutant 0 et en isolant le dernier terme dans la deuxième somme :
$$E(T_n) = \sum_{l=0}^{n-2} (l+1) q^l - \sum_{k=0}^{n-2} kq^k - (n-1) q^{n-1} + nq^{n-1}$$

En réunissant les deux sommes, on obtient :

$$E(T_n) = \sum_{l=0}^{n-2} q^l + q^{n-1}$$

D'où

$$E(T_n) = \sum_{l=0}^{n-1} q^l.$$

On reconnaît la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \neq 1$. D'où

$$\boxed{E(T_n) = \frac{1-q^n}{1-q}.}$$

2. (a) On a $X_n(\Omega) = \{0,1\}$. De plus, $P(X_n = 0) = P(\cap_{i=1}^n F_i) = q^n$.
À l'aide du complémentaire, on en déduit que $P(X_n = 1) = 1 - q^n$.
X_n suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $1 - q^n$.
   (b) Il en résulte que $\boxed{E(X_n) = 1 - q^n.}$
3. (a) Soit $k \in [|1, n-1|]$. On a $(Y_n = k) = \cap_{i=1}^k F_i \cap P_{k+1}$. Donc, en procédant de la même façon que précédemment, on en déduit que
$$P(Y_n = k) = q^k p.$$
   (b) On a $(Y_n = n) = \cap_{i=1}^n F_i$. D'où $P(Y_n = n) = q^n$.
   (c) On a $T_n = X_n + Y_n$. Par linéarité, on en déduit que
$$E(T_n) = E(X_n) + E(Y_n).$$
D'où $E(Y_n) = E(T_n) - E(X_n) = \frac{1-q^n}{1-q} - (1-q^n) = \underline{q\frac{1-q^n}{1-q}}$
4.
```
import random as rd
def alea(p,n) :
    T=0
    Y=0
    X=0
    for i in range(n) :
T=T+1
a=rd.random()
if a<p :
    X=1
    return [T,X,Y]
        else :
    Y=Y+1
    return [T,X,Y]
```