DS 9 mathématiques

BCPST 1 2018-2019

— Durée : 2 heures.

— Documents et calculatrice non autorisés.

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement l'urne $\mathcal{U}_1$ contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne $\mathcal{U}_2$ contient les boules numérotées 3, 4, 5 et 6.
On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans $\mathcal{U}_1$ après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : 1, 3, 2, 3, 5. Quel est le contenu de $\mathcal{U}_1$ à l'issue du $5^{\text{ième}}$ échange ?
2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance mathématique $E(X_1)$.
3. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
   (b) Calculer la covariance du couple (X_1, X_2).
4. Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on a :
   (a) $P[X_{n+1} = 0] = \dfrac{1}{6} P[X_n = 1]$.
   (b) Pour tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant 5$, $P[X_{n+1} = k] = \frac{7-k}{6} P[X_n = k-1] + \frac{k+1}{6} P[X_n = k+1]$.
   (c) $P[X_{n+1} = 6] = \dfrac{1}{6} P[X_n = 5]$.
5. En déduire que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $E(X_{n+1}) = \frac{2}{3} E(X_n) + 1$.
6. Calculer alors $E(X_n)$ en fonction de n, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} E(X_n)$.

Exercice 2. On note $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit l'application f par :

$$f : \begin{array}{lcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + 10y + 7z, x + 4y + 3z, -2x - 8y - 6z) \end{array}$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

On rappelle que si g est une application linéaire de E vers F, que $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base de E et que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est une base de F, la matrice $mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(g) = (m_{ij})$ est la matrice représentant g relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Par définition :

$$\forall j \in \{1, 2, \cdots, p\}, g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} f_i.$$

Dans le cas où $E = F$ et $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, on note cette matrice plus simplement $mat_{\mathcal{E}}(g)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. On note $A = mat_{\mathcal{B}}(f)$. Expliciter la matrice A.
3. (a) Montrer que $\ker f = \text{vect}(u)$.
   (b) La matrice A est-elle inversible ? Justifier votre affirmation.
4. (a) Déterminer le vecteur $v = (v_1, 1, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $f(v) = u$.
   (b) On pose $w = (0, 1, -1)$. Montrer que $f(w) = v$.
   (c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$.
   (d) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}'$.

5. (a) On note $N = mat_{\mathcal{B}'}(f)$. Expliciter N.
   (b) Montrer que $N^3 = 0_{3,3}$.
   (c) En déduire que pour tout $f \circ f \circ f = 0$.
   (d) Qu'en est-il de A^3 ? On justifiera sans calculer explicitement les produits.

Exercice 3. Pour tout $n \geq 1$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4 - (\frac{k}{n})^2}}$.
2. Justifier que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et a pour limite $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$.
3. À l'aide du changement de variable $x = 2\cos(\theta)$, calculer I.