DS 9 mathématiques

BCPST 1 2018-2019

- Durée : 2 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement l'urne $\mathcal{U}_1$ contient les boules numérotées 1 et 2, l'urne $\mathcal{U}_2$ contient les boules numérotées 3, 4, 5 et 6.
On appelle échange l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans $\mathcal{U}_1$ après n échanges successifs.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : 1, 3, 2, 3, 5. Quel est le contenu de $\mathcal{U}_1$ à l'issue du $5^{\text{ième}}$ échange ?
2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance mathématique $E(X_1)$.
3. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2.
   (b) Calculer la covariance du couple (X_1, X_2).
4. Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on a :
   (a) $P[X_{n+1} = 0] = \dfrac{1}{6} P[X_n = 1]$.
   (b) Pour tout entier k, $1 \leqslant k \leqslant 5$, $P[X_{n+1} = k] = \frac{7-k}{6} P[X_n = k-1] + \frac{k+1}{6} P[X_n = k+1]$.
   (c) $P[X_{n+1} = 6] = \dfrac{1}{6} P[X_n = 5]$.
5. En déduire que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$: $E(X_{n+1}) = \frac{2}{3} E(X_n) + 1$.
6. Calculer alors $E(X_n)$ en fonction de n, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n)$.

Correction

Dans la suite, pour tout $n \geq 1$, on note D_n le résultat du n^{e}lancer de dé.

1. L'urne contient uniquement la boule 5.
2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance mathématique $E(X_1)$. Après 1 échange, l'urne $\mathcal{U}_1$ contient 1 ou 3 boules. Plus précisément :
$$P(X_1 = 1) = P(D_1 \in \{1,2\}) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},$$
le dé étant équilibré. De même, $P(X_1 = 3) = P(D_1 \in \{3,4,5,6\}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
Et donc :
$$E(X_1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 3 = \underline{\frac{7}{3}}.$$
3. (a) Les différentes valeurs possibles de (X_1, X_2) sont $\{(1,2),(1,0),(3,2),(3,4)\}$. Déterminons la probabilité de chacune des possibilités. D'après la formule des probabilités composées :
$$P(X_1 = 1, X_2 = 2) = P(X_2 = 2 | X_1 = 1) P(X_1 = 1), \quad P(X_1 = 1, X_2 = 0) = P(X_2 = 0 | X_1 = 1) P(X_1 = 1)$$
$$P(X_1 = 3, X_2 = 2) = P(X_2 = 2 | X_1 = 3) P(X_1 = 3), \quad P(X_1 = 3, X_2 = 4) = P(X_2 = 4 | X_1 = 3) P(X_1 = 3)$$
En remplaçant par les différentes valeurs,
$$P(X_1 = 1, X_2 = 2) = \tfrac{5}{6}\tfrac{1}{3}, \quad P(X_1 = 1, X_2 = 0) = \tfrac{1}{6}\tfrac{1}{3}$$
$$P(X_1 = 3, X_2 = 2) = \tfrac{3}{6}\tfrac{2}{3}, \quad P(X_1 = 3, X_2 = 4) = \tfrac{3}{6}\tfrac{2}{3}$$

D'où

$$P(X_1 = 1, X_2 = 2) = \tfrac{5}{18}, \quad P(X_1 = 1, X_2 = 0) = \tfrac{1}{18}$$

$$P(X_1 = 3, X_2 = 2) = \tfrac{1}{3}, \quad P(X_1 = 3, X_2 = 4) = \tfrac{1}{3}$$

On en déduit que :

$$P(X_2 = 0) = \frac{1}{18}, P(X_2 = 2) = \frac{11}{18}, P(X_2 = 4) = \frac{1}{3}.$$

(b) On sait que

$$cov(X_1, X_2) = E(X_1 X_2) - E(X_1)E(X_2).$$

Or

$$E(X_1 X_2) = \frac{5}{18} \cdot 1 \cdot 2 + \frac{1}{18} \cdot 1 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{58}{9}$$

et

$$E(X_1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{7}{3}, E(X_2) = \frac{11}{18} \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 4 = \frac{23}{9}.$$

D'où

$$cov(X_1, X_2) = \frac{58}{9} - \frac{7}{3}\frac{23}{9} = \frac{13}{27}.$$

4. Montrer que, pour tout entier n de $\mathbb{N}^*$ on a :

(a) On a :

$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 0) &= P(X_{n+1} = 0, X_n = 1) \\ &= P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) P(X_n = 1) \\ &= \tfrac{1}{6} P(X_n = 1) \end{aligned}$$

(b) Soit entier k, $1 \leqslant k \leqslant 5$,

$$P(X_{n+1} = k) = P((X_{n+1} = k, X_n = k-1) \cup (X_{n+1} = k, X_n = k+1))$$

$(X_{n+1} = k, X_n = k-1), (X_{n+1} = k, X_n = k+1)$ étant deux événements incompatibles, on a

$$P(X_{n+1} = k) = P(X_{n+1} = k, X_n = k-1) + P(X_{n+1} = k, X_n = k+1)$$

à l'aide de la formule des probabilités composées, on obtient

$$P(X_{n+1} = k) = P(X_{n+1} = k | X_n = k-1) P(X_n = k-1) + P(X_{n+1} = k | X_n = k+1) P(X_n = k+1)$$

D'où

$$P(X_{n+1} = k) = P(D_{n+1} \notin \mathcal{U}_1 | X_n = k-1) P(X_n = k-1) + P(D_{n+1} \in \mathcal{U}_1 | X_n = k+1)(X_n = k+1)$$

Donc

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{6 - (k-1)}{6} P(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6} P(X_n = k+1).$$

Autrement dit,

$$\boxed{P(X_{n+1} = k) = \frac{7-k}{6} P(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6} P(X_n = k+1).}$$

(c) De la même façon, $P(X_{n+1} = 6) = P(X_{n+1} = 6 | X_n = 5) P(X_n = 5) = \dfrac{1}{6} P(X_n = 5)$

5. Soit $n \geq 1$. Par définition,

$$\begin{array}{rcl} E(X_{n+1}) & = & \sum_{k=0}^{6} P(X_{n+1}=k)k \\ & = & \sum_{k=1}^{5} P(X_{n+1}=k)k + P(X_{n+1}=6)6 \\ & = & \sum_{k=1}^{5}(\frac{7-k}{6}P(X_n=k-1)+\frac{k+1}{6}P(X_n=k+1))k + P(X_{n+1}=6)6 \\ & = & \sum_{k=1}^{5}\frac{7-k}{6}P(X_n=k-1)k + \sum_{k=1}^{5}\frac{k+1}{6}P(X_n=k+1)k + P(X_{n+1}=6)6 \\ & = & \sum_{l=0}^{4}(\frac{(6-l)(l+1)}{6}P(X_n=l) + \sum_{l=2}^{6}\frac{l}{6}P(X_n=l))(l-1) + P(X_n=5), \end{array}$$

en posant $l = k-1$ dans la première somme et en posant $l = k+1$ dans la deuxième somme. D'où

$$E(X_{n+1}) = P(X_n=0) + \sum_{l=1}^{6}(\frac{(6-l)(l+1)}{6}P(X_n=l) + \sum_{l=1}^{6}\frac{l}{6}P(X_n=l))(l-1).$$

Donc

$$E(X_{n+1}) = P(X_n=0) + \sum_{l=1}^{6}\frac{4l+6}{6}P(X_n=l)$$

On a alors

$$\begin{array}{rcl} E(X_{n+1}) & = & P(X_n=0) + \sum_{l=1}^{6} P(X_n=l) + \sum_{l=1}^{6}\frac{2l}{3}P(X_n=l) \\ & = & \sum_{l=0}^{6} P(X_n=l) + \frac{2}{3}\sum_{l=1}^{6} lP(X_n=l) \\ & = & \underline{1+\frac{2}{3}E(X_n)} \end{array}$$

6. On reconnaît alors une suite arithmético-géométrique. De plus, $a = \frac{2}{3}a+1 \Leftrightarrow a = 3$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \geq 1, E(X_n) = (\frac{2}{3})^n\alpha + 3.$$

Comme $E(X_1) = \frac{7}{3}$, $\alpha = -1$. D'où

$$\boxed{\forall n \geq 1, E(X_n) = 3 - (\frac{2}{3})^n.}$$

On a $0 \leq \frac{2}{3} < 1$. D'où $\lim_{n\to+\infty}(\frac{2}{3})^n = 0$. D'où

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = 3.}$$

Exercice 2. On note $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit l'application f par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (2x+10y+7z, x+4y+3z, -2x-8y-6z) \end{array}$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

On rappelle que si g est une application linéaire de E vers F, que $\mathcal{E} = (e_1, \cdots, e_p)$ est une base de E et que $\mathcal{F} = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$ est une base de F, la matrice $mat_{\mathcal{E},\mathcal{F}}(g) = (m_{ij})$ est la matrice représentant g relativement aux bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$. Par définition :

$$\forall j \in \{1, 2, \cdots, p\}, g(e_j) = \sum_{i=1}^{n} m_{ij}f_i.$$

Dans le cas où $E = F$ et $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, on note cette matrice plus simplement $mat_{\mathcal{E}}(g)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

2. On note $A = mat_{\mathcal{B}}(f)$. Expliciter la matrice A.
3. (a) Montrer que $\ker f = \text{vect}(u)$.
   (b) La matrice A est-elle inversible ? Justifier votre affirmation.
4. (a) Déterminer le vecteur $v = (v_1, 1, v_3)$ de $\mathbb{R}^3$ qui vérifie $f(v) = u$.
   (b) On pose $w = (0, 1, -1)$. Montrer que $f(w) = v$.
   (c) Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$.
   (d) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de (x, y, z) dans la base $\mathcal{B}'$.
5. (a) On note $N = mat_{\mathcal{B}'}(f)$. Expliciter N.
   (b) Montrer que $N^3 = 0_{3,3}$.
   (c) En déduire que pour tout $f \circ f \circ f = 0$.
   (d) Qu'en est-il de A^3 ? On justifiera sans calculer explicitement les produits.

Correction

On note $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On définit l'application f par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (2x + 10y + 7z, x + 4y + 3z, -2x - 8y - 6z) \end{array}$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. Soient $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} f((x, y, z) + \lambda(a, b, c)) &= (2(x + \lambda a) + 10(y + \lambda b) + 7(z + \lambda c), \\ &\quad (x + \lambda a) + 4(y + \lambda b) + 3(z + \lambda c), -2(x + \lambda a) - 8(y + \lambda b) - 6(z + \lambda c)) \\ &= (2x + 10y + 7z, x + 4y + 3z, -2x - 8y - 6z) + \lambda(2a + 10b + 7c, a + 4b + 3c, -2a - 8b - 6c) \\ &= f(x, y, z) + \lambda f(a, b, c) \end{aligned}$$

   f est bien linéaire.
2. On a :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}$$

3. (a) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a

$$(x, y, z) \in Ker(f) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   En effectuant $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, l'équation est équivalente à

$$\begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Puis, en échangeant L_1 et L_2, et en effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, l'équation est alors équivalente à

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Ce qui est équivalent à

$$z = -2y, x = 2y$$

   D'où

$$Ker(f) = \{(2y, y, -2y), y \in \mathbb{R}\} = vect((2, 1, -2))$$

   On a bien $\boxed{Ker(f) = vect(u).}$

(b) On sait que A est un inversible si et seulement si f est bijective. Or f étant un endomorphisme, f est bijective si et seulement si f est injective. Or f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Comme $Ker(f) = vect(u)$, on en déduit que f n'est pas injective et don que A n'est pas inversible.

4. (a) Soit $v = (v_1, 1, v_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(v) = u$. Autrement dit,

$$(2v_1 + 10 + 7v_3, v_1 + 4 + 3v_3, -2v_1 - 8 - 6v_3) = (2, 1, -2)$$

D'où

$$\begin{cases} 2v_1 + 7v_3 & = & -8 \\ v_1 + 3v_3 & = & -3 \\ -2v_1 - 6v_3 & = & 6 \end{cases}$$

en effectuant $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, on en déduit que le système est équivalent à

$$\begin{cases} 2v_1 + 7v_3 & = & -8 \\ v_1 + 3v_3 & = & -3 \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

On a $2 \cdot 3 - 1 \cdot 7 = -1 \neq 0$. La matrice est donc inversible et

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_3 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Par équivalence, on a $v_1 = 3, v_3 = -2$.
(En vérifiant, on constate que l'on a bien $f(3, 1, -2) = (2, 1, -2)$)

(b) On pose $w = (0, 1, -1)$. On a $f(w) = (10+7\cdot(-1), 0+4\cdot 1+3\cdot(-1), -8\cdot 1-6\cdot(-1))$ D'où $f(w) = (3, 1, -2) = v$.

(c) Montrons que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Cette famille de $\mathbb{R}^3$ étant de cardinal 3, il suffit de montrer qu'elle est de rang 3. Calculons son rang :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_3, L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cette dernière matrice étant de rang 3, on en déduit que la famille est de rang 3 et est donc libre. C'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

(d) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$(x, y, z) = au + bv + cw \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Après calculs, on trouve :

$$\begin{cases} -x - 3y - 3z & = & a \\ x + 2y + 2z & = & b \\ 2y + z & = & c \end{cases}$$

5. (a) D'après les questions précédentes, $f(u) = 0u + 0v + 0w, f(v) = 1 \cdot u + 0v + 0w, f(w) = 0u + 1v + 0w$. D'où

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) On a donc :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) On en déduit que $Mat_{\mathcal{B}'}(f)^3 = 0_{3,3}$. D'où

$$Mat_{\mathcal{B}'}(f \circ f \circ f) = 0_{3,3}$$

En revenant au application linéaire, on en déduit que $f \circ f \circ f = 0$.

(d) Comme on a $f \circ f \circ f = 0$, en considérant la matrice représentative de f dans la base canonique, on en déduit que

$$Mat_{\mathcal{B}}(f)^3 = 0_{3,3}.$$

Autrement dit, $A^3 = 0_{3,3}$.

Exercice 3. Pour tout $n \geq 1$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4 - (\frac{k}{n})^2}}$.
2. Justifier que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et a pour limite $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}dx$.
3. À l'aide du changement de variable $x = 2\cos(\theta)$, calculer I.

Correction

Pour tout $n \geq 1$, on pose : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2 - k^2}}$.

1. Soit $n \geq 1$. On a

$$\begin{aligned} S_n &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}. \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{\sqrt{4-(\frac{k}{n})^2}} \\ &= \textstyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4-(\frac{k}{n})^2}} \end{aligned}$$

2. On reconnaît que S_n est une somme de Riemann associée à la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. Donc la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ est convergente et a pour limite $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}dx$.
3. la fonction $\theta \mapsto 2\cos(\theta)$ étant C^1 et réalisant une bijection de $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ vers $[0, 1]$, le changement de variable et possible et :

$$dx = -2\sin(\theta)d\theta, \qquad \begin{aligned} \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \frac{-2\sin(\theta)d\theta}{\sqrt{4-4\cos(\theta)^2}} \\ &= \frac{-2\sin(\theta)d\theta}{2\sqrt{1-\cos(\theta)^2}} \\ &= \frac{-\sin(\theta)d\theta}{\sqrt{\sin(\theta)^2}} \\ &= \frac{-\sin(\theta)d\theta}{|\sin(\theta)|} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I &= \textstyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin(\theta)d\theta}{|\sin(\theta)|} \\ &= \textstyle\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 1d\theta \\ &= \underline{\frac{\pi}{6}}. \end{aligned}$$