TP 15 informatique

Étude de suites réelles

BCPST 1 2019-2020

Points abordés

— suites de réels, tracé de graphes.

Exercice 1. Soit n un entier naturel non nul . On considère $f_n : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}, x \mapsto x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x - 1$.

1. Montrer que f_n s'annule une unique fois en un réel positif noté a_n.
2. En utilisant Python représenter les courbes de $f_1, \ldots, f_{20}$. Faire une conjecture sur la monotonie et la limite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. (a) Donner le signe de $f_{n+1}(a_n)$.
   (b) En utilisant la monotonie de f_{n+1} comparer a_n et a_{n+1}.
   (c) Conclure quant à la monotonie de (a_n).
   (d) Prouver la convergence de (a_n) vers un réel notée l.
   (e) En utilisant pour $n > 1$ que $a_n \leq a_2 < 1$, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{n+1}$ et en déduire que $\dfrac{1}{1-l} - 2 = 0$.
   (f) Déduire la valeur de l.

Exercice 2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 2, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 1$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, 0 < u_n - \sqrt{2} \leq \frac{(2-\sqrt{2})^{2^n}}{2^{2^n-1}}$
4. En déduire une fonction `approx(epsilon)` qui renvoie un couple (a, b) tel que $0 \leq b - a \leq \epsilon$ et $\sqrt{2} \in [a, b]$.

Exercice 3. On fixe $x \in [0, 1]$ et n un entier naturel pair.

1. Montrer que pour tout $t \in [0, x]$, on a
$$\sum_{k=0}^{n+1} (-1)^k t^k \leq \frac{1}{1+t} \leq \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k$$
2. En déduire que $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} \leq \ln(1 + x) \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}$.
3. Déduire un algorithme qui permet de calculer $\ln(1 + x)$ pour $x \in [0, 1]$ à epsilon près et écrire une fonction `approx(x,`ϵ`)` qui renvoit une valeur approchée de $\ln(1 + x)$ à ϵ près.
4. En déduire une approximation de $\ln(2)$ à l'aide de la fonction précédente.
5. De même, en adaptant le calcul précédent, on obtient de la même manière une approximation de $\ln(1 - x)$ avec $x \in [0, 1[$. Écrire ne fonction `approx_bis(x,`ϵ`)` qui renvoit une valeur approchée de $\ln(1 - x)$ à ϵ près.
   Déterminer une approximation de $\ln(\frac{1}{2})$ comme précédemment, et en déduire une approximation de $\ln(2)$.
6. Comparer en les deux méthodes de calculs pour l'approximation de $\ln(2)$. On pourra par exemple compté le nombre d'additions nécessaires pour obtenir une valeur approchée à 10^{-10} près.