TP 18 informatique

BCPST 1 2019-2020

Probabilités

Exercices

Exercice 1. On cherche à modéliser le jeu de "pile ou face". Dans notre cas, on suppose que la pièce est non truquée, que le programme simule les lancers et que l'on effectue n parties.

Écrire une fonction `PileouFace(n)` qui prend en argument un entier n correspondant au nombre de parties, qui laisse l'utilisateur saisir pile ou face n fois, et qui affiche le nombre de parties gagnées et perdues.

Exercice 2. Soit n un entier naturel non nul. On considère l'expérience suivante : une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher, n sont numérotées 0, les autres sont numérotées de 1 à n. On effectue au hasard deux tirages successifs et sans remise d'une boule dans cette urne. On note X le plus grand numéro obtenu, et Y le plus petit numéro obtenu lors de ces deux tirages.

1. Écrire une fonction `simulation(n)` qui effectue l'expérience présentée en retournant la liste $[X, Y]$.
2. Écrire une fonction `repetition(m,n)` qui permet d'effectuer cette expérience m fois. La valeur de retour sera la liste des résultats de ces m expériences.

Exercice 3. On considère l'expérience suivante : on lance trois dés et on calcule la somme.

1. Écrire une fonction `dede(n)` qui prend en argument un entier n correspondant au nombre de fois que l'on lance les dés et qui renvoit une liste de taille n contenant les résultats obtenus.
2. Écrire une fonction `freq(n) qui prend en argument` un entier n et qui renvoit une liste L où pour tout $i \in \{3, \dots, 18\}$, $L[i]$ correspond au nombre de fois que l'on a obtenu i

Exercice 4. Écrire une fonction `deTruque()` qui ne prend aucun argument et qui retourne un entier compris entre 1 et 6, sachant qu'on veut avoir les probabilités d'apparition suivantes :

1. $p(d = 1) = \frac{1}{12}$; 2. $p(d = 2) = \frac{1}{4}$; 3. $p(d = 3) = \frac{1}{4}$; 4. $p(d = 4) = \frac{1}{24}$; 5. $p(d = 5) = \frac{1}{8}$.

Exercice 5. On rappelle le jeu de Monty-Hall : vous êtes en face de trois portes, derrière l'une d'entre elles se cache une voiture, derrière les deux autres se cache une chèvre. Le présentateur vous demande de choisir l'une de ces trois portes. Lui seul connaît l'emplacement de la voiture. Pour plus de suspens, il ouvre une des portes que vous n'avez pas choisi et qui ne cache pas la voiture. Il vous propose de changer de porte ou de conserver votre choix. Enfin, on découvre ce qui se cache derrière la voiture.

1. Écrire une fonction `MontyHall()` qui simule le jeu de Monty-Hall. On supposera que la probabilité qu'une des portes cache la voiture est de $\frac{1}{3}$.
2. En effectuant un certain nombre de simulations, déterminer s'il vaut mieux ou on changer de portes.

Exercice 6. Modéliser l'expérience suivante : on lance une pièce. Tant que l'on n'obtient pas face, on continue de la lancer. On note le nombre de tentatives effectuées.

Exercice 7. Urne de Polya.

On considère l'expérience suivante : au départ, on a k boules blanches et l boules rouges. On pioche une boule dans l'urne dont on note la couleur, puis on la remet et on rajoute une boule de la même couleur. On répète cette expérience n fois.

1. Écrire une fonction `UrnePolya(k,l,n)` permettant de modéliser cette expérience. La valeur de retour sera la liste des couleurs obtenues.
2. On fixe $k = 1, l = 1, n = 100$. Faire des simulations pour obtenir une probabilité empirique de l'événement "la centième boule tirée est rouge". Faire de même avec $k = 2, l = 3, n = 45$.

Exercice 8. $\star$ Écrire une fonction `permutation(n)` prenant en argument un entier de taille n et retournant une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ de façon aléatoire. On suppose que l'ensemble des permutations de $\{1, 2, \ldots, n\}$ est muni de la probabilité uniforme.

Exercice 9. $\star$ Écrire une fonction `mutation(chaine)` qui prend en argument une chaîne de caractères contenant des A, T, G, C et retournant une chaîne mutée de manière aléatoire. On supposera que la probabilité d'une délétion d'une base est de $\frac{1}{1000}$, la probabilité d'un ajout d'une base est de $\frac{1}{500}$ et que la probabilité d'une substitution est de $\frac{1}{200}$, chacune des substitutions étant équiprobable.

Exercice 10. $\star$ Le processus de Galton-Watson a été introduit par Sir Francis Galton Watson pour étudier l'évolution de la survie d'un patronyme. L'objectif de cet exercice sera de modéliser informatiquement le problème. Considérons un individu X. Nos hypothèses vont être les suivantes :

— la probabilité qu'il ait k enfants est p_k (on se limitera à $k \leq 5$).
— tout descendant de X a la même distribution de probabilité pour le nombre d'enfants.
— on suppose aussi que le nombre de descendants de deux enfants Y_1, Y_2 d'une même génération est indépendante.
— On suppose qu'un individu à la génération i meurt à la génération $i + 1$.
— s'il y a 0 descendant, la lignée est éteinte.

1. Écrire une fonction qui prend en argument une liste L correspondant à $[p_0, p_1, \cdots, p_k]$ et qui retourne le nombre d'enfants obtenus pour un individu.
2. Écrire une fonction qui prend en argument n et une liste $L = [p_0, p_1, \cdots, p_k]$, n correspondant au nombre de générations, L à la liste des probabilités et retournant $M = [a_0, a_1, \cdots, a_n]$ où a_i est le nombre d'individus à la i^{e} génération, sachant que $a_0 = 1$ (on ramène le problème à un unique ancêtre).
3. Il existe des résultats théoriques à propos de ce type de processus. Nous allons les tester informatiquement. Un résultat assez intuitif est le suivant.

   Si le nombre moyen d'enfants m est :
   — inférieur strict à 1, alors la lignée est vouée à disparaître.
   — égal à 1, alors la lignée est vouée à disparaître, sauf si $p_1 = 1$.
   — supérieur à 1, alors la lignée à une chance non nulle de survivre.

   Parmi ces différentes distributions de probabilités lesquelles donnent un m inférieur strict à 1 ? égal à 1 supérieur à 1 ?

   (a) $[0.5, 0.5]$. (b) $[0.3, 0.3, 0.3, 0.1]$. (c) $[0.2, 0.4, 0.3, 0.1]$.
   (d) $[0.4, 0.4, 0.1, 0.1]$. (e) $[0.3, 0.4, 0.3]$.

   Écrire des fonctions vous permettant de vérifier expérimentalement le théorème.