TP 19 : probabilités suite

BCPST 1 2019-2020

Exercice 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on rappelle que $[|0, n|]$ désigne l'ensemble $\{0, 1, \cdots, n\}$. Pour tout $n \geq 1$, on pose $E_n = \{0\} \times [|0, 1|] \times \cdots \times [|0, n-1|]$. Soit $(w_0, \cdots, w_{n-1})$ un élément de E_n et $i \in \{1, \cdots, n-1\}$. On dit que w_i est une valeur record si pour tout $j \in \{0, \cdots, i-1\}, w_j < w_i$. La position i est alors une position record. Par exemple, si $w = (0, 1, 1, 0, 3, 2) \in E_6$, $w_1 = 1$ est une valeur record et 1 est une position record. De même, $w_4 = 3$, donc 3 est une valeur record et 4 est une position record. Ainsi, par convention, la position 0 n'est pas un record.

Soit $(w_0, \cdots, w_{n-1})$ un élément de E_n et $k \in \{1, \cdots, n-1\}$ on dit que k est une valeur record stationnaire s'il existe $i \in \{1, \cdots, n-1\}$ tel que $w_i = k$, i est une position record et pour tout $j > i, w_j = k$. Par exemple, si $w = (0, 0, 1, 0, 2, 2, 2, 2)$, on a $w \in E_8$ et 2 est une valeur record stationnaire.

Dans la suite, on munit E_n de la probabilité uniforme.

1. Écrire une fonction `elementE(n)` qui retourne un élément de E_n tiré au hasard. On suppose que $n \geq 1$.
2. Soit $n \geq 1$. Écrire une fonction `nbRec(L)` qui prend en argument un élément L de E_n et qui compte le nombre de positions records dans L.
3. Soit $n \geq 1$. On suppose que la variable E est la liste contenant exactement tous les éléments de E_n. Écrire une fonction `nbRecmoy()` qui renvoie le nombre de positions records moyens. On pourra utiliser la fonction `nbRec`.
4. Écrire une fonction `RecMax(L)` qui prend en argument un élément L de E_n et qui retourne la valeur record la plus grande de L.
5. Écrire une fonction `contientRecStat(L)` qui renvoit `True` si L contient une valeur record stationnaire et `False` sinon.

Exercice 2. On veut illustrer informatiquement le principe suivant :

"Répéter un grand nombre de fois une expérience aléatoire donnée permet d'obtenir une valeur approchée des probabilités théoriques des issues possibles"

1. On commence avec un dé à 6 faces non pipés.
   (a) Écrire une fonction qui modélise un lancer de dé.
   (b) Rappeler la probabilité théorique d'un résultat possible.
   (c) Écrire une fonction `freqlancer(n)` qui effectue n lancers de dé et qui retourne la liste des fréquences de chaque valeur et comparer avec les probabilités théoriques.
2. On considère 4 dés non pipés qu'on lance successivement et on s'intéresse à la probabilité de l'événement A :"obtenir au moins un 6".
   (a) Déterminer la probabilité de l'événement A.
   (b) Un résultat théorique affirme que dans 95% des cas, si on effectue cette expérience 50000 fois, l'événement A serait réalisé au moins une fois sur deux. Vérifier ce résultat théorique d'un point de vue informatique.