TP 7 informatique (avec exercices de math)

BCPST 1 2019-2020

Étude de suites

Grâce à l'informatique, il nous est possible d'étudier les suites et de formuler des conjectures en analysant les données calculées par l'ordinateur.

Exercice 1. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 1$.

1. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que $a = 3a - 1$.
2. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n - a$ est une suite géométrique dont vous déterminerez la raison.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
4. (INFO) Écrire une fonction Python qui prend en argument un entier n et qui renvoie la valeur de u_n.
5. (INFO) Écrire une fonction Python qui détermine le premier entier n tel que $u_n > 10000$.
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier $\sum_{k=0}^{n^2} u_k$.

Exercice 2. On considère un élevage de sardines et on note N_n le nombres de sardines à l'année n. On suppose qu'à l'année 0, l'exploitation compte 1000 individus. On suppose qu'entre l'année n et $n+1$, la population triple. Mais à la fin de l'année n, l'éleveur produit B boîtes contenant 4 sardines.

1. Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$, une relation de récurrence entre N_n et N_{n+1}.
2. On suppose ici que $B = 1000$. L'exploitation est-telle viable à long terme ? Même question avec $B = 500$.
3. (INFO) Écrire une fonction `viable(B)` qui renvoie `True` si l'élevage est viable et `False` sinon.
4. (INFO) On suppose ici que la population de sardines finit par disparaître. Ecrire une fonction `fin(B)` qui renvoie l'année où il n'y a plus de sardines.

Exercice 3. Un client décide d'emprunter à la banque un montant de 150000 euros. La banque accepte de lui faire un crédit avec un taux annuel de $1,5$ pour cent. Il effectue un remboursement de R euros par an. Écrire un programme déterminant le nombre d'années nécessaires pour finir le remboursement.

Exercice 4. On considère une version discrète (à base de suite) d'un modèle proposé par Volterra pour étudier l'évolution de deux populations partageant la même nourriture. Dans notre contexte, il s'agit de deux familles de scorpions vivant dans le désert. On désigne par u_n la population de la première famille et par v_n la population de la deuxième famille. Le modèle est le suivant : pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_n + 0.1u_n(3 - 0.06u_n - 0.02v_n)$$
$$v_{n+1} = v_n + 0.1v_n(1 - 0.01u_n - 0.02v_n)$$

1. Écrire une fonction `nombreScorpions(`u_0`,`v_0`,n)` qui retourne un couple (u_n, v_n) qui correspond aux nombres de scorpions de chacune des deux familles.
2. En fixant différentes valeurs de u_0 et de v_0 puis en faisant varier n, formuler une conjecture plausible sur la valeur de u_n et de v_n.

La suite de Syracuse

La suite de Syracuse est définie de la manière suivante :

$$\begin{cases} u_n & = & \frac{n}{2} & \text{si n pair} \\ u_n & = & 3n+1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercice 5. Écrire une fonction qui permet de calculer la suite de Syracuse.

Il existe une célèbre conjecture à propos de cette suite. On cherche à la vérifier à l'aide de tests.

Exercice 6.

1. On définit le temps de vol d'un entier positif n comme étant le premier $p \in \mathbb{N}$ tel que :

$$f^{\circ p}(n) = 1,$$

où f^p est la puissance p^{e} de `syracuse` pour la composition. Par exemple :

   (a) le temps de vol de 1 est 0,

   (b) le temps de vol de 3 est 7 car les images de 3 par les puissances successives de f sont 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1.

   Écrire une fonction `tempsVol(n)` qui prend en argument un entier et qui retourne le temps de vol de n. Tester cette fonction avec de grands entiers. Que peut-on conjecturer ?

2. Écrire une fonction `altitudeMax(n)` qui prend en argument un entier et qui retourne la valeur maximale parmi $f(n), f^{\circ 2}(n) \cdots , f^{\circ p}(n)$, où p est le temps de vol de n. Par exemple, l'altitude maximale de 3 est 16.