Continuité

1 Continuité

1.1 Définitions

Définition 1.1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$.

— On dit que f est *continue en* x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

— On dit que f est *continue à droite en* x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad 0 < x - x_0 < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

— On dit que f est *continue à gauche en* x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in I, \quad 0 < x_0 - x < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

— On dit que f est *continue sur* I si f est continue en tout point de I.

Remarque 1. Une fonction f est continue en x_0 si et seulement si f est continue à droite et à gauche en x_0.

Remarque 2. La continuité (respectivement à droite, à gauche) de f en un point x_0 est un cas particulier de limite (respectivement à droite, à gauche). Ainsi, cette définition est équivalente à la notation

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ (respectivement } \lim_{x > x_0, x \to x_0} f(x) = f(x_0), \lim_{x < x_0, x \to x_0} f(x) = f(x_0)).$$

Remarque 3. Dans certains cas, la définition de la contiuité de f sur un ensemble I est ambigüe. Illustrons ce propos sur un exemple. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{array}{ll} \forall x \in]-\infty, 1[, & f(x) = x - 1 \\ \forall x \in [1, +\infty[, & f(x) = x + 1 \end{array}.$$

La fonction f est continue sur $\mathbb{R} \backslash \{1\}$. Par contre, elle n'est pas continue en 1 car la limite à gauche et la limite à droite ne coïncident pas.

Mais la fonction $f_{[1,+\infty[}$ (c'est-à-dire la restriction de f à l'intervalle $[1, +\infty[$) est continue sur $[1, +\infty[$. Elle est donc en particulier continue en 1.

1.2 Opérations

Proposition 1.2. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies sur un intervalle I et continues en $x_0 \in I$. Alors :*

— *$f + g$ est continue en x_0 ;*

— *fg est continue en x_0.*

Démonstration. Résulte des théorèmes sur les limites. □

Proposition 1.3. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I et continue en $x_0 \in I$. Soit $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle J contenant $y_0 = f(x_0)$ et continue en y_0. Alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

Démonstration. Résulte du théorème sur la limite d'une composée. □

1.3 Prolongement par continuité

Définition 1.4. Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

— On dit que f est *prolongeable par continuité* en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\ell = \lim\limits_{x_0} f$.

— On définit la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle "*prolongement par continuité* de f en x_0".

Remarque 4. 1. Dans la pratique, on continuera souvent à noter f à la place de $\tilde{f}$.

2. Le nom est cohérent : la fonction $\tilde{f}$ est bien continue en x_0. De plus, en dehors de x_0 f et $\tilde{f}$ coïncident.
3. Montrer qu'une fonction f est prolongeable par continuité en un point x_0 revient donc à montrer que f admet une limite finie l en x_0. De plus, pour prolonger par continuité en x_0, on pose $f(x_0)$ égale à l.

Exercice 1 *:* Pour chacune des fonctions suivantes, justifier si elles sont oui ou non prolongeables par continuité au point demandé et si oui, expliquer comment on la prolonge par continuité.

1. $f_1 : \mathbb{R}^\star \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x\sin(x)$ en 0 ;
2. $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\cos(x-1)-1}{(x-1)^2}$ en 1 ;
3. $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{|\sin(x)|}{1-\cos(x)}$ en 0.

1. La fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x\sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$ car produit de l'identité et de la fonction sin.Elle admet donc une limite en 0 égale à $g(0) = 0$. Constatons que g est un prolongement continue de f_1. Donc f_1 a bien une limite en 0 égale à 0.
2. Lorsque x tend vers 1, $x - 1$ tend vers 0. À l'aide d'un équivalent usuel on obtient :

$$\frac{\cos(x-1)-1}{(x-1)^2} \sim_1 \frac{-\frac{(x-1)^2}{2}}{(x-1)^2} \sim_1 -\frac{1}{2}.$$

   Il en résulte que f_2 admet une limite en 1 égale à $-\frac{1}{2}$. On peut donc prolonger f_2 par continuité en posant $f_2(1) = -\frac{1}{2}$.
3. À l'aide des équivalents usuels, on a :

$$f_3(x) \sim_0 \frac{|x|}{\frac{x^2}{2}} \sim_0 \frac{2}{|x|}.$$

   Or $\lim_{x\to 0} \frac{2}{|x|} = +\infty$ qui n'est pas fini. Donc f_3 n'est pas prolongeable par continuité en 0.

2 Théorèmes généraux

2.1 Théorèmes des valeurs intermédiaires

Il existe différents énoncés équivalents de ce théorème.

Théorème 2.1 (Version abstraite)**.** *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Théorème 2.2 (Version usuelle)**.** *Soit $(a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^2$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $a \leqslant b$ et que f est continue sur $]a,b[$. On note $l_1 = \lim_{a^+} f$ et $l_2 = \lim_{b^-} f$. Soit y_0 un élément strictement compris entre l_1 et l_2. Il existe alors $x_0 \in]a,b[$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.*

Remarque 5. On a bien entendu des variantes avec des intervalles ouverts, semi-ouverts et fermés.

Remarque 6. Pour passer de la version abstraite à la version concrète, il faut revenir la définition d'intervalle.

Démonstration. On démontre le cas particulier suivant : $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$, $f(a) < 0, f(b) > 0$. On veut montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ vérifiant $f(c) = 0$.

On construit les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la façon suivante :

$$a_0 = a, b_0 = b. \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_{n+1} = a_n & b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0 \\ a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} & b_{n+1} = b_n & \text{sinon .} \end{cases} .$$

Montrons que (a_n) et (b_n) sont deux suites adjacentes. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose :

$$P(n) : a_n \leqslant b_n, a_n \leqslant a_{n+1}, b_n \geqslant b_{n+1}, |b_n - a_n| \leqslant \frac{b-a}{2^n}$$

Montrer P par récurrence.

- Initialisation : par hypothèse, $a \leqslant b$. Donc $a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b$. Sachant que $a_0 \leqslant \min(a_0, \frac{a_0+b_0}{2}) \leqslant a_1$ et $b_0 \geqslant \max(\frac{a_0+b_0}{2}, b_0) \geqslant b_1$ et $|b_0 - a_0| = \frac{b-a}{2^0}$, on a bien $P(0)$ vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons $P(n+1)$.
  - Cas 1 : $f(\frac{a_n+b_n}{2}) > 0$. $|b_{n+1} - a_{n+1}| = |\frac{b_n-a_n}{2}| \leqslant \frac{b-a}{2^{n+1}}$
  - Cas 2 : $f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leqslant 0$.
- Donc, d'après le principe de récurrence, $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que :

- (a_n) est une suite croissante ;
- (b_n) est une suite décroissante ;
- $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{a-b}{2^n} = 0$

Autrement dit, (a_n) et (b_n) sont adjacentes et par théorème, elles convergent vers une limite commune que l'on note c.

Par construction, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) \leqslant 0 \leqslant f(b_n).$$

f étant continue, on en déduit par passage à la limite :

$$f(c) \leqslant 0 \leqslant f(c).$$

Ainsi, 0 admet c comme antécédent par f. □

Remarque 7. Les autres cas peuvent se ramener à se cas particulier. Par exemple, si on a $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$ on effectue le raisonnement avec la fonction $-f$. Dans le cas où on cherche un antécédent de $y_0 \in [f(a), f(b)]$, on effectue le changement de fonction $g = f - y_0$.

On peut également adapter au cas où les bornes de l'intervalle ne sont pas incluses.

Remarque 8. La démonstration présentée repose sur le principe de dichotomie. De plus, elle fournit un algorithme permettant de donner un encadrement aussi précis que l'on veut d'une valeur c vérifiant $f(c) = 0$.

Théorème 2.3 (Corollaire du TVI)**.** *Soit $(a, b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})^2$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que $a \leqslant b$ et que f est continue et strictement monotone sur $]a, b[$. On note $l_1 = \lim_{a^+} f$ et $l_2 = \lim_{b^-} f$. Soit y_0 un élément strictement compris entre l_1 et l_2. Il existe alors un unique $x_0 \in]a, b[$ vérifiant $f(x_0) = y_0$.*

Exercice 2 : Application : Soit f une application de $[0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ continue sur $[0, 1]$. Montrer que f admet un point fixe. On rappelle qu'un réel x_0 est un point fixe de f si $f(x_0) = x_0$.

Posons la fonction g définie sur $[0, 1]$ par :

$$\forall x \in [0, 1], g(x) = x - f(x).$$

Par construction, g est la différence de deux fonctions continues sur $[0, 1]$ donc g est continue sur $[0, 1]$. De plus, $g(0) = -f(0)$ est négative et $g(1) = 1 - f(1)$ car f est à valeurs dans $[0, 1]$. En résumé :

- la fonction g est continue sur l'intervalle $[0, 1]$;

— les réels $g(0)$ et $g(1)$ sont respectivement négatif et positif.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ vérifiant $g(x_0) = 0$. D'où $x_0 = f(x_0)$.

Exercice 3 *:* Montrer que tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.

Soit P un polynôme de degré impair. Notons d son degré et a son coefficient dominant. Par croissances comparées, on sait que

$$P(x) \sim_{+\infty} ax^d, P(x) \sim_{-\infty} ax^d.$$

En notant $s(a)$ le signe de a, aux infinis on a :

$$\lim_{x\to+\infty} ax^d = s(a)\infty, \lim_{x\to-\infty} ax^d = s(-a)\infty.$$

Il en résulte que :

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = s(a)\infty, \lim_{x\to-\infty} P(x) = s(-a)\infty.$$

En résumé :

— P est continue sur $\mathbb{R}$,

— $\lim_{x\to+\infty} P(x) = s(a)\infty, \lim_{x\to-\infty} s(-a)\infty$,

— 0 est un élément de $]s(-a)\infty, s(a)\infty[$ (ou $]s(a)\infty, s(-a)\infty[$ si $a < 0$)

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant $P(\alpha) = 0$. P admet donc au moins une racine réelle.

2.2 Théorème des bornes atteintes

Théorème 2.4. *Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur le segment $[a,b]$. Alors Im(f) est un segment.*

Démonstration. Admis. □

Remarque 9. De manière plus explicite, le théorème peut s'énoncer comme suit :

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une application continue sur le segment $[a,b]$. Il existe alors deux réels $m < M$ vérifiant $f([a,b]) = [m,M]$. Ainsi :

$$\forall y_0 \in [m,M], \exists x_0 \in [a,b], f(x_0) = y_0.$$

De plus, m et M sont respectivement le minimum et le maximum de f.

Remarque 10. Un des aspects de ce théorème rejoint celui du théorème des valeurs intermédiaires : un segment étant un intervalle particulier, l'image d'un segment $[a,b]$ par une application continue sur $[a,b]$ est donc un intervalle. Par-contre, on a une information supplémentaire : en posant $M = sup(f)$ et $m = inf(f)$, il existe $c \in [a,b]$ et $d \in [a,b]$ tels que :

$$f(c) = M, f(d) = m.$$

De plus, $\mathrm{Im}(f) = [m,M]$.

Une autre façon de l'exprimer est de dire que f est bornée et atteint ses bornes.

Exercice 4 *:* Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x^{14} - x^4 + x^2 - 1.$$

admet un minimum global.

On présente une preuve non calculatoire. f étant une fonction polynomiale, on en déduit qu'elle est équivalentes aux infinis à x^{14}. La fonction f a donc comme limite $+\infty$ en $-\infty$ et $+\infty$. Il en résulte qu'il existe $A < 0$ et $B > 0$ vérifiant :

$$\forall x < A, f(x) > f(0) \text{ et } \forall x > B, f(x) > f(0).$$

De plus, f est continue sur le segment $[A,B]$. D'après le théorème des bornes, il existe $(c,d) \in [A,B]^2$ vérifiant :

$$\forall x \in [A,B], f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d).$$

Montrons que $f(c)$ est le minimum global de f. Soit $x \in \mathbb{R}$.

— Cas 1 : $x \in [A, B]$. Par construction $f(c) \leqslant f(x)$.
— Cas 2 : $x < A$ ou $x > B$. Par construction de A et B, $f(x) \geqslant f(0)$. Or $0 \in [A, B]$. Donc $f(0) \geqslant f(c)$. D'où $f(x) \geqslant f(c)$.

On en déduit que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f(c)$. Autrement dit, $f(c)$ est le minimum de la fonction.

2.3 Théorème de la bijection continue

Théorème 2.5. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors*

1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,*
2. *la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.*

Démonstration. Admis. □

Remarque 11. Ce théorème a les mêmes hypothèses que le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires. Mais la conclusion est plus forte : une propriété est obtenue pour la réciproque de f : la continuité.

Exercice 5 *:* Construire à l'aide du théorème de la bijection continue les fonctions racines n^{e}, arctan.

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.
— Cas 1 : n pair. La fonction $f : x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.
De plus, $\lim_0 f = f(0) = 0$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
Donc d'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$ et sa réciproque que l'on appelle la racine n-ième est continue sur $\mathbb{R}^+$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même.
— Cas 2 : n impair. La fonction $f : x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.
Donc d'après le théorème de la bijection continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ et sa réciproque que l'on appelle la racine n-ième est continue sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

La fonction tan est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

De plus, $\lim_{x \to \frac{-\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(x) = +\infty$. Donc d'après le théorème de la bijection continue, tan réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}$ et sa réciproque que l'on appelle arctan est continue sur $\mathbb{R}$ et réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

3 Exercices

Exercice 6 *:* Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(1 + x) = f(x).$$

Montrer que $f(\mathbb{R})$ est un segment.

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier continue sur le segment $[0, 1]$. Donc d'après le théorème des bornes atteintes, il existe $(c, d) \in [0, 1]^2$ vérifiant :

$$f([0, 1]) = [f(c), f(d)].$$

Montrons que $f(\mathbb{R}) = f([0, 1])$. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction f étant 1-périodique, il existe $x_0 \in [0, 1]$ vérifiant $f(x) = f(x_0)$. Or $f(x_0) \in [f(c), f(d)]$. Donc $f(x) \in [f(c), f(d)]$

Par conséquent, on a l'inclusion $f(\mathbb{R}) \subset [f(c), f(d)]$. L'autre inclusion étant également vérifiée, on en déduit que $f(\mathbb{R}) = [f(c), f(d)]$. Ce dernier ensemble étant un segment, il en découle la proposition.

Exercice 7 *:* On pose pour a réel strictement positif la fonction f_a définie sur $[\ 0\ ;\ a\ ]$ par :

$$\text{Pour tout } x \in [0; a], \quad f_a(x) = \frac{a - x}{a(a + x)}$$

1. Justifier la dérivabilité de f_a sur $[0;a]$ et calculer sa dérivée.
   En déduire le tableau des variations de f_a en précisant les valeurs aux bornes.
2. Montrer que f_a réalise une bijection de $[0;a]$ sur $\left[0;\dfrac{1}{a}\right]$.
   On note f_a^{-1}sa bijection réciproque.
   Donner le tableau des variations de f_a^{-1} en précisant les valeurs aux bornes.
3. Montrer que $f_a^{-1}=f_{\frac{1}{a}}$.

1. La fonction f_a étant le quotient de deux polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,a]$ on en déduit qu'elle est dérivable sur $[0,a]$. De plus :
   $$\forall x\in[0,a], f_a'(x)=\frac{-2}{(a+x)^2}.$$
   La dérivée est donc strictement négative sur le segment $[0,a]$. Il en résulte que f_a est strictement décroissante sur $[0,a]$. De plus, $f_a(0)=\frac{1}{a}$ et $f_a(a)=0$.
2. Récapitulons :
   — f_a est continue et strictement décroissante sur $[0,a]$
   — $f_a(0)=\frac{1}{a}$ et $f_a(a)=0$.
   D'après le théorème de la bijection continue, f_a réalise une bijection de $[0;a]$ sur $\left[0;\dfrac{1}{a}\right]$ et sa réciproque f_a^{-1} est continue et réalise une bijection de $[0,\frac{1}{a}]$ sur $[0,a]$. aux bornes. De plus, f_a^{-1} est strictement décroissante sur son intervalle de définition.
3. On raisonne par équivalence. Soient $x\in[0,a]$ et $y\in[0,\frac{1}{a}]$.

$$\begin{array}{rcll}
f_a(x)=y & \iff & \frac{a-x}{a(a+x)} & = & y \\
& \iff & a-x & = & ya(a+x) \\
& \iff & -x-yax & = & ya^2-a \\
& \iff & x(-1-ya) & = & ya^2-a \\
& \iff & x & = & \frac{ya^2-a}{(-1-ya)} \\
& \iff & x & = & \frac{a-ya^2}{(1+ya)} \\
& \iff & x & = & \frac{a^2(\frac{1}{a}-y)}{a(\frac{1}{a}+y)} \\
& \iff & x & = & \frac{(\frac{1}{a}-y)}{\frac{1}{a}(\frac{1}{a}+y)} \\
& \iff & x & = & f_{\frac{1}{a}}(y)
\end{array}.$$

Du calcul précédent, on en conclut que f_a et $f_{\frac{1}{a}}$ sont bien réciproques l'une de l'autre.

Exercice 8 *:* Écrire une fonction Python `racine(a,d)` qui prend en argument deux réels positifs et qui renvoit une liste $[x,y]$ telle que $|x-y|<d$ et $x\leqslant\sqrt{a}\leqslant y$.

```
def python racine(a,d) :
    if a>= 1 :
```

```
    mini = 1
    maxi = a
else :
    mini = a
    maxi = 1
while (maxi-mini) >= d :
    milieu = (maxi+mini)/2
    if milieu**2>a :
        maxi = milieu
    else :
        mini = milieu
return [mini,maxi]
```