DM 1 mathématiques

BCPST 1B 2017-2018

- Devoir à rendre le 15 septembre
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$\forall x \in [1, +\infty[, f(x) = \sqrt{x - 4\sqrt{x-1} + 3} + \sqrt{x - 6\sqrt{x-1} + 8}.$$

1. Soit $I_1 = [5, 10]$. En posant $x = u^2 + 1$ avec $u \geq 0$, montrer que f est constante sur I_1.
2. Soit $I_2 = [1, 5]$ et $I_3 = [10, +\infty[$. Déterminer une expression simplifiée de f sur I_2 et I_3.

Exercice 2. On considère les fonctions f admettant le tableau de variations (T) suivant :

x	$-\infty$		2017		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2018	$\nearrow$	$+\infty$

1. Donner un exemple de fonction f ayant comme tableau de variations (T).
2. On considère une nouvelle fonction f vérifiant les conditions suivantes :
   - f vérifie admet le tableau de variations (T) ;
   - il existe des réels a, b, c tels que pour tout x réel, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

   Déterminer le signe de chacun des réels a, b, c.

On considère une nouvelle fonction f vérifiant les conditions suivantes :

- f vérifie admet le tableau de variations (T) ;
- il existe des réels u, v, w tels que pour tout x réel, $f(x) = (ux^2 + vx + w)^2$.

1. Montrer qu'il existe a, b, c, d, e des réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

   On exprimera ces nombres en fonction de u, v, w.
2. Les nombres a, b, c, d, e sont-ils non nuls ? Déterminer leur signe.

Exercice 3. Deux amis, Passe-Temps et Passe-Partout jouent à un jeu dont le principe suivant :

— un certain nombre d'allumettes (que l'on notera n) sont disposées sur une table ;

— les joueurs jouent à tour de rôle. Dans la situation étudiée, Passe-Temps commence, puis Passe-Partout joue ensuite ;

— à chaque tour, un joueur peut retirer $1, 2$, ou 3 allumettes de la rangée ;

— est déclaré vainqueur le joueur retirant la dernière allumette.

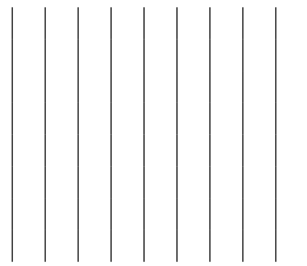

Figure 1 – Un rangée d'allumettes pour $n = 10$

1. Dans cette question, $n \in \{1, 2, 3\}$. Expliquer pourquoi, en jouant bien Passe-Temps est sûr de gagner. On dit que Passe-Temps a une stratégie gagnante
2. Dans cette question, $n = 4$. Expliquer pourquoi, en jouant bien, Passe-Partout est sûr de gagner.
3. Déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante pour $n \in \{5, 6, 7, 8\}$.
4. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

   $P(n)$: si n n'est pas un multiple de 4 alors Passe-Partout a une stratégie gagnante. Sinon, Passe-Temps a une stratégie gagnante.

   Démontrer $P(n)$.