DM 1 mathématiques

BCPST 1B 2017-2018

— Devoir à rendre le 15 septembre

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Soit f la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par

$$\forall x \in [1,+\infty[, f(x) = \sqrt{x - 4\sqrt{x-1} + 3} + \sqrt{x - 6\sqrt{x-1} + 8}.$$

1. Soit $I_1 = [5, 10]$. En posant $x = u^2 + 1$ avec $u \geq 0$, montrer que f est constante sur I_1.
2. Soit $I_2 = [1, 5]$ et $I_3 = [10, +\infty[$. Déterminer une expression simplifiée de f sur I_2 et I_3.

Correction

Soit $x \geq 1$. Donc $x - 1 \geq 0$. En posant $u = \sqrt{x-1}$, on a alors $x = u^2 + 1$. Ainsi,

$$\begin{array}{rcll} f(x) & = & \sqrt{u^2+1-4\sqrt{u^2}+3} + \sqrt{u^2+1-6\sqrt{u^2}+8} & \\ & = & \sqrt{u^2+1-4u+3} + \sqrt{u^2+1-6u+8} & (u \geq 0) \\ & = & \sqrt{u^2+1-4u+4} + \sqrt{u^2-6u+9} & \\ & = & \sqrt{(u-2)^2} + \sqrt{(u-3)^2} & \\ & = & |u-2| + |u-3| & (1) \end{array}$$

Soit $a \geq 1$ et $a < b$. On a

$$\begin{array}{rcllll} x \in [a,b] & \Leftrightarrow & a \leq x \leq b & & & \\ & \Leftrightarrow & a \leq u^2 + 1 \leq b & (u \geq 0) & & \\ & \Leftrightarrow & 0 \geq a - 1 \leq u^2 \leq b - 1 & & & \\ & \Leftrightarrow & \sqrt{a-1} \leq u \leq \sqrt{b-1} & (2) & (\text{fonction racine strictement croissante sur } \mathbb{R}^+) & \end{array} \qquad (1)$$

1. Ainsi, dans le cas où $I_1[5, 10]$, d'après (2), on en déduit que $2 \leq u \leq 3$. Donc d'après (1), pour tout $x \in [5, 10]$,

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & u - 2 + 3 - u \\ & = & \underline{1}. \end{array}$$

   La fonction f est donc constante sur I_1.

2. Sur I_2, d'après (2), on en déduit que $0 \leq u \leq 2$. Donc d'après (1), pour tout $x \in [1, 5]$,

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 2 - u + 3 - u \\ & = & 5 - 2u \\ & = & \underline{5 - 2\sqrt{x-1}}. \end{array}$$

3. Sur I_3, d'après (2), on en déduit que $3 \leq u$. Donc d'après (1), pour tout $x \in [10, +\infty[$,

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & u - 2 + u - 3 \\ & = & 2u - 5 \\ & = & \underline{2\sqrt{x-1} - 5}. \end{array}$$

Exercice 2. On considère les fonctions f admettant le tableau de variations (T) suivant :

x	$-\infty$		2017		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2018	$\nearrow$	$+\infty$

1. Donner un exemple de fonction f ayant comme tableau de variations (T).
2. On considère une nouvelle fonction f vérifiant les conditions suivantes :
   — f vérifie admet le tableau de variations (T) ;
   — il existe des réels a, b, c tels que pour tout x réel, $f(x) = ax^2 + bx + c$.

   Déterminer le signe de chacun des réels a, b, c.

On considère une nouvelle fonction f vérifiant les conditions suivantes :
— f vérifie admet le tableau de variations (T) ;
— il existe des réels u, v, w tels que pour tout x réel, $f(x) = (ux^2 + vx + w)^2$.

1. Montrer qu'il existe a, b, c, d, e des réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

   On exprimera ces nombres en fonction de u, v, w.
2. Les nombres a, b, c, d, e sont-ils non nuls ? Déterminer leur signe.

Correction

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = (x - 2017)^2 + 2018$. La fonction f étant une fonction polynôme de degré 2, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2(x - 2017).$$

   On a $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. En résumé, on a le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		2017		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	2018	$\nearrow$	$+\infty$

2. Par hypothèse, f est un polynôme de degré au plus 2 ayant comme tableau de variations (T). Ce polynôme ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$ et n'étant pas constant, on en déduit que f est un polynôme de degré 2. Or f est strictement positif sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, $a > 0$. De plus, $f(0) = c = 2018$. Donc $c > 0$. Et $f'(0) = b$. Or $0 < 2017$. Donc $f'(0) < 0$. D'où $b < 0$. En résumé :

$$\boxed{a > 0, b < 0, c > 0.}$$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. En développant, on a :

$$f(x) = u^2x^4 + 2uvx^3 + (2uw + v^2)x^2 + 2vwx + w^2.$$

   En posant $a = u^2, b = 2uv, c = 2uw + v^2, d = 2vw, e = w^2$, on a alors

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.}$$

2. Posons P le polynôme défini par $P : x \mapsto ux^2 + vx + w$. On a alors $f = P^2$. La fonction f ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$, il en résulte que P ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, f n'est pas constant. Donc le polynôme P n'est pas constant. En résumé, P est un polynôme de degré au plus 2 qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et non constant. Il en résulte que P est un polynôme de degré 2.

   Comme P ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, le discriminant de P est strictement négatif. Donc $v^2 - 4uw < 0$. Par conséquent, $0 \leq v^2 < 4uw$. Donc u et w sont de mêmes signes et non nuls. De plus, f étant polynômiale, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = 2P'P$. Or f' s'annule en 2017 et $P(2017) \neq 0$. Donc P' s'annule en 2017. Autrement dit,

$$2 \cdot 2017u + v = 0.$$

   Par conséquent, v est non nul et du signe de $-u$. On a $a = u^2$ et $e = w^2$. Or u et w sont non nuls. Donc $a > 0, e > 0$. u et v sont de signe strictement différents. Donc $b < 0$. De même, w est strictement du signe de u et v de signe de $-u$. Donc $d < 0$. Comme u et w sont de même signe, $c > 0$. En résumé,

$$\boxed{a > 0, b < 0, c > 0, d < 0, e > 0}.$$

Exercice 3. Deux amis, Passe-Temps et Passe-Partout jouent à un jeu dont le principe suivant :

— un certain nombre d'allumettes (que l'on notera n) sont disposées sur une table ;

— les joueurs jouent à tour de rôle. Dans la situation étudiée, Passe-Temps commence, puis Passe-Partout joue ensuite ;

— à chaque tour, un joueur peut retirer $1, 2$, ou 3 allumettes de la rangée ;

— est déclaré vainqueur le joueur retirant la dernière allumette.

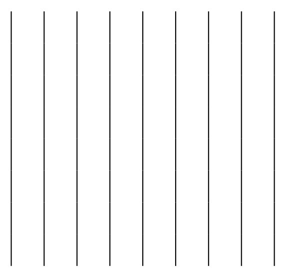

Figure 1 – Un rangée d'allumettes pour $n = 10$

1. Dans cette question, $n \in \{1, 2, 3\}$. Expliquer pourquoi, en jouant bien Passe-Temps est sûr de gagner. On dit que Passe-Temps a une stratégie gagnante
2. Dans cette question, $n = 4$. Expliquer pourquoi, en jouant bien, Passe-Partout est sûr de gagner.
3. Déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante pour $n \in \{5, 6, 7, 8\}$.
4. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

   $P(n)$: si n n'est pas un multiple de 4 alors Passe-Partout a une stratégie gagnante. Sinon, Passe-Temps a une stratégie gagnante.

   Démontrer $P(n)$.

Correction

1. Soit $n \in \{1, 2, 3\}$. Il est alors possible que Passe-Temps enlève tous les bâtons en un coup en prenant n bâtons. Ainsi, Passe-Temps gagne en un coup.
2. Pour $n = 4$, on note k le nombre de bâtons qu'enlève Passe-Temps. On a $1 \leq k \leq 3$. Donc $n - k \in \{1, 2, 3\}$. Ainsi, en enlevant $n - k$ bâtons Passe-Partout gagne.
3. Pour $n \in \{5, 6, 7\}$ On a $n - 4 \in \{1, 2, 3\}$. Passe-Temps commence par enlever $n - 4$ bâtons. Il reste alors à Passe-Partout $n - (n - 4) = 4$ bâtons. Notons k le nombre de bâtons qu'enlève alors Passe-Partout. Il reste alors $4 - k \in \{1, 2, 3\}$ bâtons. Il suffit alors à Passe-Temps d'enlever $4 - k$ bâtons pour gagner.

   Pour $n = 8$, si on note k le nombre de bâtons enlevés par Passe-Temps, on a $n - k \in \{5, 6, 7\}$. Il suffit alors que Passe-Partout applique la stratégie par Passe-Temps dans le cas où $n \in \{5, 6, 7\}$ pour gagner.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

   $Q(n)$: si n n'est un multiple de 4, le joueur dont c'est le tour a une stratégie gagnante. Sinon, l'autre joueur a une stratégie gagnante.

— Initialisation : pour $n = 0$, le joueur dont c'est le tour ne peut pas enlever de bâtons. Donc il ne peut pas enlever le dernier bâton. Il a par conséquent perdu. L'autre joueur a donc une stratégie gagnante sans rien faire.

  Pour $n \in \{1, 2, 3\}$, il suffit au joueur d'enlever n bâtons pour gagner.

— Hérédité : on suppose que $Q(n), Q(n+1), Q(n+2)$ sont vraies pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $Q(n+3)$ est vraie. On a donc $n+3$ bâtons.

  — Cas 1 : $n = 4k - 3$.

    Il y a donc $4k$ bâtons. Après le tour du joueur il reste donc $n' \in \{4k-1, 4k-2, 4k-3\}$. D'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que deuxième joueur a une stratégie gagnante.

    Dans cette configuration, on en déduit que le joueur dont c'est le tour n'a pas de stratégie gagnante.

  — Cas 2 : $n \in \{4k-2, 4k-1, 4k\}$. Donc $n+3 \in \{4k+1, 4k+2, 4k+3\}$. Il suffit alors au joueur d'enlever $n+3-4k$ bâtons. Ainsi, il reste $4k \in \{n, n+1, n+2\}$ bâtons au joueur suivant. Or d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que ce dernier est perdant. Par conséquent, le premier joueur est gagnant.

  Par disjonction de cas, en déduit que $Q(n+3)$ est vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q(n)$ est vraie.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la proposition $P(n)$ est vraie : en effet, Passe-Temps est le joueur dont c'est le tour (c'est lui qui commence).