DM 1 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

— Devoir à rendre le 18 septembre

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on définit l'équation E_m d'inconnue réelle x par

$$x^4 - (2m+4)x^2 + (m-2)^2 = 0. \tag{E_m}$$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation E_m en fonction du paramètre réel m.

Correction

Soient $m \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. On pose $X = x^2$. L'équation (E_m) est alors équivalente à :

$$X^2 - (2m+4)X + (m-2)^2 = 0. \tag{A}$$

On reconnaît alors une équation du second degré, de discriminant $\Delta = (2m+4)^2 - 4(m-2)^2$. Donc Δ est égal à $4\left((m+2)^2 - (m-2)^2\right)$. D'où $\Delta = 32m$. On en déduit que (A) a des solutions réelles si et seulement si $m \geq 0$. Dans ce dernier cas,

$$X = \frac{(2m+4) + \sqrt{32m}}{2} \text{ ou } X = \frac{(2m+4) - \sqrt{32m}}{2}$$

Autrement dit,

$$X = (m+2) + 2\sqrt{2m} \text{ ou } X = (m+2) - 2\sqrt{2m}.$$

De l'étude précédente, en posant $X_1 = (m+2) + 2\sqrt{2m}$ et $X_2 = (m+2) - 2\sqrt{2m}$,

$$x^4 - (2m+4)x^2 + (m-2)^2 = 0 \iff \left(x^2 = X_1 \text{ ou } x^2 = X_2\right).$$

m étant positif, X_1 est bien positif. De plus, $X_1 X_2 = (m-2)^2 \geq 0$. Donc X_2 est également positif. On en déduit que :

$$x^4 - (2m+4)x^2 + (m-2)^2 = 0 \iff x \in \{\sqrt{X_1}, -\sqrt{X_1}, \sqrt{X_2}, -\sqrt{X_2}\}.$$

En résumé,

m	$m < 0$	$m = 0$	$m > 0$
$S =$	$\emptyset$	$\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$	$\{\sqrt{X_1}, -\sqrt{X_1}, \sqrt{X_2}, -\sqrt{X_2}\}$

où $X_1 = (m+2) + 2\sqrt{2m}$ et $X_2 = (m+2) - 2\sqrt{2m}$.

Exercice 2. On dispose les entiers de 1 à 16 dans une grille de la façon suivante

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

puis on colorie 8 cases en rouge et 8 cases en noir de sorte qu'il y ait autant de cases rouges et de cases noires pour chaque ligne et chaque colonne.

1. Donner un exemple de grille coloriée vérifiant la propriété énoncée.
2. En gardant votre exemple, calculer la somme de toutes les valeurs des cases coloriées en rouge. Faire de même avec les cases noires. Que remarquez-vous ?

3. Montrer que pour tout "bon" coloriage, la valeur de la somme des cases rouges est égale à 68.

Correction

1. La grille suivante

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

vérifie les conditions données.

2. Sommons les valeurs des cases rouges : $2+4+6+7+9+12+13+15=68$.
De même, sommons les valeurs des cases noires : $1+3+5+8+10+11+14+16=68$.
On remarque que dans les deux cas, on retrouve la même valeur : 68.

3. Représentons différemment la grille :

$0+1$	$0+2$	$0+3$	$0+4$
$4+1$	$4+2$	$4+3$	$4+4$
$8+1$	$8+2$	$8+3$	$8+4$
$12+1$	$12+2$	$12+3$	$12+4$

Soit C un bon coloriage de la grille. Notons $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_8$ les 8 valeurs coloriées en rouge.
On s'intéresse à $S = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_8$. Du fait qu'il y a exactement deux cases rouges par ligne, il existe $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2) \in \{1,2,3,4\}^8$ tel que :

$$\alpha_1 = a_1, \alpha_2 = a_2, \alpha_3 = 4 + b_1, \alpha_4 = 4 + b_2, \alpha_5 = 8 + c_1, \alpha_6 = 8 + c_2, \alpha_7 = 8 + d_1, \alpha_8 = 8 + d_2,$$

Donc :

$$S = 0 + 0 + 4 + 4 + 8 + 8 + 12 + 12 + a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2.$$

D'où

$$S = 48 + a_1 + a_2 + b_1 + b_2 + c_1 + c_2 + d_1 + d_2.$$

Or, dans un bon coloriage, il y a exactement deux cases rouges par colonne. Donc le 8-uplet $(a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2, d_1, d_2)$ contient exactement deux 1, deux 2, deux 3 et deux 4. D'où

$$S = 48 + 2 \times (1 + 2 + 3 + 4).$$

Il en résulte que

$$\boxed{S = 68.}$$

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^n$. Montrer par récurrence que $S_n = 2^{n+1} - 1$.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P(n)$: $S_n = 2^{n+1} - 1$. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

— Initialisation : on a $2^{0+1} - 1 = 2 - 1$. D'où $2^{0+1} - 1 = 1$. Donc $P(0)$ est bien vraie.

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(n)$ est vraie. Montrons alors que $P(n+1)$ est vraie. On a :

$$S_{n+1} = S_n + 2^{n+1}.$$

D'après $P(n)$, on sait que $S_n = 2^{n+1} - 1$. D'où

$$S_{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1}.$$

Il en résulte que :

$$S_{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1.$$

D'où : $S_{n+1} = 2^{n+2} - 1$.
Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

— D'après le principe de récurrence, on en déduit que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, S_n = 2^{n+1} - 1}.$$