DM 2 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

- Devoir à rendre le 11 octobre.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnu réel x

$$mx + 1 = \sqrt{x(x-1)} \tag{E}$$

en fonction du paramètre réel m.

1. Décrire l'ensemble de définition D_E de l'équation (E).
2. Soient $x_0 \in D_E$ et $m \in \mathbb{R}$. Montrer que x_0 est solution de (E) si et seulement si :
$$(m^2-1)x_0^2 + (2m+1)x_0 + 1 = 0 \text{ et } mx_0 + 1 \geq 0.$$
3. Résoudre l'équation (E) dans le cas où $m \in \left\{-\frac{5}{4}, -1, 0, 1\right\}$.
4. Montrer que l'équation (E) n'a pas de solutions réelles dans le cas où $m < -\frac{5}{4}$.
5. Décrire l'ensemble des solutions de (E) en fonction du paramètre réel m. On pourra résumer les différentes possibilités dans un tableau.

Exercice 2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $\sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\ldots + \sqrt{2+\sqrt{1}}}}} \leq \sqrt{n} + 1.$

Exercice 3. Pour tout $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$N_1(A) = |x| + |y|, N_2(A) = \sqrt{x^2+y^2}, N_\infty(A) = \max(|x|, |y|).$$

Et pour tout $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $B = (z, t) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit $A + B$ et λA par :

$$A + B = (x+z, y+t), \lambda A = (\lambda x, \lambda y).$$

Soit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ une application. On dit que N est une norme si :

- $\forall A \in \mathbb{R}^2, ((N(A) = 0) \implies (A = (0,0)))$.
- $\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$.
- $\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall B \in \mathbb{R}^2, N(A+B) \leq N(A) + N(B)$.

Soient M, N deux normes. On dit que M est équivalente à N si :

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0, \forall A \in \mathbb{R}^2, \alpha N(A) \leq M(A) \leq \beta N(A).$$

1. Soient M, N deux normes. Montrer que M est équivalente à N si et seulement si N est équivalente à M.
2. Soient M, N, P trois normes. Montrer que si M est équivalente à N et que N est équivalente à P alors M est équivalente à P.
3. Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont des normes.
4. Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont toutes équivalentes entre elles.