DM 2 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

- Devoir à rendre le 11 octobre.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnu réel x

$$mx + 1 = \sqrt{x(x-1)} \tag{E}$$

en fonction du paramètre réel m.

1. Décrire l'ensemble de définition D_E de l'équation (E).
2. Soient $x_0 \in D_E$ et $m \in \mathbb{R}$. Montrer que x_0 est solution de (E) si et seulement si :
$$(m^2-1)x_0^2 + (2m+1)x_0 + 1 = 0 \text{ et } mx_0 + 1 \geq 0.$$
3. Résoudre l'équation (E) dans le cas où $m \in \left\{-\frac{5}{4}, -1, 0, 1\right\}$.
4. Montrer que l'équation (E) n'a pas de solutions réelles dans le cas où $m < -\frac{5}{4}$.
5. Décrire l'ensemble des solutions de (E) en fonction du paramètre réel m. On pourra résumer les différentes possibilités dans un tableau.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. L'équation (E) est défini si et seulement si $x(x-1) \geq 0$. Or $x(x-1)$ est positif si et seulement si $x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$. Donc :
$$\boxed{D_E =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[}.$$
2. Soient $x_0 \in D_E$, $m \in \mathbb{R}$. Raisonnons par équivalence :
$$\begin{aligned} mx_0 + 1 = \sqrt{x_0(x_0-1)} &\iff (mx_0+1)^2 = x_0(x_0-1) && \text{et } mx_0 + 1 \geq 0 \\ &\iff m^2x_0^2 + 2mx_0 + 1 = x_0^2 - x_0 && \text{et } mx_0 + 1 \geq 0 \\ &\iff (m^2-1)x_0^2 + (2m+1)x_0 + 1 = 0 && \text{et } mx_0 + 1 \geq 0 \end{aligned}$$
3. Résolvons l'équation dans chacun des cas.
   - Cas 1 : $m = -\frac{5}{4}$.
   On a alors :
$$\begin{aligned} (E) &\iff \tfrac{9}{16}x_0^2 - \tfrac{6}{4}x_0 + 1 = 0 && \text{et } -\tfrac{5}{4}x_0 + 1 \geq 0 \\ &\iff (\tfrac{3}{4}x_0 - 1)^2 = 0 && \text{et } -\tfrac{5}{4}x_0 + 1 \geq 0 \\ &\iff x_0 = \tfrac{4}{3} && \text{et } -\tfrac{5}{4}x_0 + 1 \geq 0 \\ &\iff x_0 = \tfrac{4}{3} && \text{et } -\tfrac{2}{3} \geq 0 \\ &\iff \text{FAUX} \end{aligned}$$
   Il en résulte que $\boxed{S = \emptyset}$.

— Cas 2 : $m = -1$.
On a alors :

$$\begin{aligned}(E) &\iff -x_0 + 1 = 0 \quad \text{et} \ -x_0 + 1 \geq 0 \\ &\iff x_0 = 1\end{aligned}$$

On a donc $\boxed{S = \{1\}}$.

— Cas 3 : $m = 0$
Donc :

$$\begin{aligned}(E) &\iff -x_0^2 + x_0 + 1 = 0 \quad \text{et} \ +1 \geq 0 \\ &\iff -x_0^2 + x_0 + 1 = 0 \\ &\iff x_0^2 - x_0 - 1 = 0\end{aligned}$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 5$ Il en résulte que :

$$(E) \iff x_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ou } x_0 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Donc $\boxed{S = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}}$.

— Cas 4 : $m = 1$. L'équation (E) est donc équivalente à

$$3x_0 + 1 = 0 \text{ et } x_0 + 1 \geq 0.$$

Ce qui est équivalent à

$$x_0 = -\frac{1}{3}.$$

Donc $\boxed{S = \{-\frac{1}{3}\}}$.

4. Calculons le discriminant de (E). On a :

$$\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 - 1) = 4m + 1 + 4 = 4m + 5.$$

Si $m < -\frac{5}{4}$, on a alors $\Delta < 0$. Dans ce cas, $\boxed{S = \emptyset}$.

5. On se place désormais dans le cas $m > -\frac{5}{4}$, $m \neq -1, m \neq 1$. Des calculs précédents, on en déduit que

$$(E) \iff \left(x_0 = \frac{-2m-1-\sqrt{4m+5}}{2(m^2-1)} \text{ ou } x_0 = \frac{-2m-1+\sqrt{4m+5}}{2(m^2-1)}\right) \text{ et } (mx_0 + 1 \geq 0).$$

Soit $\epsilon \in \{-1, 1\}$ et posons $y_0 = \frac{-2m-1+\epsilon\sqrt{4m+5}}{2(m^2-1)}$. Étudions l'inéquation I définie par

$$my_0 + 1 \geq 0.$$

Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned}(I) &\iff m\tfrac{-2m-1+\epsilon\sqrt{\Delta}}{2(m^2-1)} + 1 \geq 0 \\ &\iff \tfrac{m(-2m-1+\epsilon\sqrt{\Delta})+2m^2-2}{2(m^2-1)} \geq 0 \\ &\iff \tfrac{-m-2+\epsilon m\sqrt{\Delta}}{m^2-1} \geq 0\end{aligned}$$

Étudions le signe du numérateur.

$$\begin{aligned}
-m-2+\epsilon m\sqrt{\Delta} \geq 0 &\iff \epsilon m\sqrt{4m+5} \geq m+2 \\
&\iff m^2(4m+5) \geq (m+2)^2 \qquad \text{et } m,\ \epsilon \text{ de même signe, } m \geq -\tfrac{5}{4} \\
&\iff 4m^3+4m^2-4m-4 \geq 0 \qquad \text{et } m,\ \epsilon \text{ de même signe, } m \geq -\tfrac{5}{4} \\
&\iff m^3+m^2-m-1 \geq 0 \qquad \text{et } m,\ \epsilon \text{ de même signe, } m \geq -\tfrac{5}{4}
\end{aligned}$$

Or, on constate qu'en développant $(X+1)^2(X-1)$ on obtient X^3+X^2-X-1. D'où :

$$-m-2+\epsilon m\sqrt{\Delta} \geq 0 \iff m \geq 1 \text{ et } m,\ \epsilon \text{ de même signe.}$$

On en déduit le signe du numérateur de my_0+1 en fonction de ϵ et de m :

m	$m<1$	$m=1$	$1<m$
$\epsilon=1$	$-$	0	$+$
$\epsilon=-1$	$-$	$-$	$-$

De l'étude du signe du numérateur et du dénominateur, on en déduit le signe de my_0+1 :

m	$m<-1$	$m=-1$	$-1<m<1$	$m=1$	$1<m$
$\epsilon=1$	$-$	X	$+$	X	$+$
$\epsilon=-1$	$-$	X	$+$	X	$-$

Résumons alors dans un tableau les différentes possibilités.

m	$m<-1$	$m=-1$	$-1<m<1$	$m=1$	$1<m$
S	$\emptyset$	$\{1\}$	$\left\{\frac{-2m-1+\sqrt{4m+5}}{2(m^2-1)}, \frac{-2m-1-\sqrt{4m+5}}{2(m^2-1)}\right\}$	$\left\{-\frac{1}{3}\right\}$	$\left\{\frac{-2m-1+\sqrt{4m+5}}{2(m^2-1)}\right\}$

Exercice 2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{\ldots+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}} \leq \sqrt{n}+1$.

Correction

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P(n) : \sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{..+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}} \leq \sqrt{n}+1.$$

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

- Initialisation : pour $n=0$, on a $0 \leq 1$ ce qui vrai, donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. $P(n)$ étant vraie par hypothèse de récurrence, on a :

$$\sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{\cdots+\sqrt{1}}}} \leq \sqrt{n}+1.$$

Donc :

$$n+1+\sqrt{n+..} \leq n+1+\sqrt{n}+1$$

Par croissance de la fonction racine carrée et par positivité des nombres .. on en déduit que :

$$\sqrt{n+1+\sqrt{n+..}} \leq \sqrt{n+1+\sqrt{n}+1}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\sqrt{n+1+\sqrt{n}+1} \leq \sqrt{n+1}+1$. Ces nombres étant positifs, par strict croissance de la fonction carrée sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\begin{aligned}
\sqrt{n+1+\sqrt{n}+1} \leq \sqrt{n+1}+1 \quad & \Leftrightarrow \quad n+1+\sqrt{n}+1 \leq (n+1)+2\sqrt{n+1}+1 \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \leq 2\sqrt{n+1} \\
& \Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \leq \sqrt{4(n+1)} \\
& \Leftrightarrow \quad n \leq 4(n+1) \text{ (strict croissance de la fonction racine carrée sur } \mathbb{R}^+) \\
& \Leftrightarrow \quad 0 \leq 3n+4 \\
& \Leftrightarrow \quad \text{VRAI } (n \geq 0)
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\sqrt{n+1\sqrt{n}+1} \leq \sqrt{n+1}+1, \text{ et } \sqrt{n+1+\sqrt{n+..}} \leq \sqrt{n+1+\sqrt{n}+1}.$$

D'où :

$$\sqrt{n+1+\sqrt{n+..}} \leq \sqrt{n+1}+1.$$

$P(n+1)$ est bien vraie.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie.

Exercice 3. Pour tout $A=(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose :

$$N_1(A) = |x|+|y|, N_2(A) = \sqrt{x^2+y^2}, N_\infty(A) = \max(|x|,|y|).$$

Et pour tout $A=(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $B=(z,t) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ on définit $A+B$ et λA par :

$$A+B = (x+z, y+t), \lambda A = (\lambda x, \lambda y).$$

Soit $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ une application. On dit que N est une norme si :
- — $\forall A \in \mathbb{R}^2, ((N(A)=0) \implies (A=(0,0)))$.
- — $\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$.
- — $\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall B \in \mathbb{R}^2, N(A+B) \leq N(A)+N(B)$.

Soient M, N deux normes. On dit que M est équivalente à N si :

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0, \forall A \in \mathbb{R}^2, \alpha N(A) \leq M(A) \leq \beta N(A).$$

1. Soient M, N deux normes. Montrer que M est équivalente à N si et seulement si N est équivalente à M.
2. Soient M, N, P trois normes. Montrer que si M est équivalente à N et que N est équivalente à P alors M est équivalente à P.
3. Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont des normes.
4. Montrer que N_1, N_2, N_∞ sont toutes équivalentes entre elles.

Correction

1. Soient M, N deux normes. On raisonne par double implication.
   - — Supposons que M est équivalente à N. Il existe donc $\alpha > 0, \beta > 0$ tels que :

     $$\forall A \in \mathbb{R}^2, \alpha N(A) \leq M(A) \leq \beta N(A).$$

     Donc :

     $$\forall A \in \mathbb{R}^2, N(A) \leq \frac{1}{\alpha} M(A) \text{ et } \frac{1}{\beta} M(A) \leq N(A).$$

     Autrement dit,

     $$\forall A \in \mathbb{R}^2, \frac{1}{\beta} M(A) \leq N(A) \leq \frac{1}{\alpha} M(A).$$

— Réciproquement, on reprend la démonstration précédente en échangeant les rôles de M et de N.

2. Soient M, N, P trois normes. Supposons que M est équivalente à N et que N est équivalente à P. Il existe alors $\alpha > 0, \beta > 0, a > 0, b > 0$ tels que :

$$\forall A \in \mathbb{R}^2, \alpha N(A) \leq M(A) \leq \beta N(A) \text{ et } aP(A) \leq N(A) \leq bN(A).$$

Montrons que M est équivalente à P. Soit $A \in \mathbb{R}^2$. On a $aP(A) \leq N(A)$ et $N(A) \leq bP(A)$. Or $\alpha > 0, \beta > 0$. Donc :

$$a\alpha P(A) \leq \alpha N(A) \text{ et } \beta N(A) \leq b\beta P(A).$$

Par définition de l'équivalence de normes,

$$\alpha N(A) \leq M(A) \leq \beta N(A).$$

Donc

$$a\alpha P(A) \leq M(A) \leq b\beta P(A).$$

Il en résulte que :

$$\forall A \in \mathbb{R}^2, a\alpha P(A) \leq M(A) \leq b\beta P(A)$$

$a\alpha$ et $b\beta$ étant strictement positifs. M est bien équivalente à P.

3. (a) Montrons que N_1 est une norme.
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Supposons que $N_1((x, y)) = 0$. On a

$$|x| + |y| = 0.$$

Par positivité des valeurs absolues, on en déduit que

$$|x| = 0, |y| = 0.$$

Autrement dit, $x = 0, y = 0$. On a bien,

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}^2, (N_1(A) = 0) \implies A = (0, 0).}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} N_1((\lambda x, \lambda y)) &= |\lambda x| + |\lambda y| \\ &= |\lambda|(|x| + |y|) \\ &= \underline{|\lambda| N_1((x, y))} \end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N_1(\lambda A) = |\lambda| N_1(A).}$$

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2, (z, t) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} N_1((x, y) + (z, t)) &= N_1((x + z, y + t)) \\ &= |x + z| + |y + t| \\ &\leq |x| + |z| + |y| + |t| && \text{D'après l'inégalité triangulaire} \\ &\leq (|x| + |y|) + (|z| + |t|) \\ &\leq N_1((x, y)) + N_1((z, t)) \end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall B \in \mathbb{R}^2, N_1(A + B) \leq N_1(A) + N_1(B)}.$$

N_1 vérifie bien les trois propriétés d'une norme. Donc N_1 est une norme.

(b) Montrons que N_2 est une norme. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Supposons que $N_2((x,y))=0$. On a

$$\sqrt{x^2+y^2}=0.$$

Donc

$$x^2+y^2=0.$$

Par positivité des carrés, on a donc $x^2=0, y^2=0$. Autrement dit, $x=0, y=0$. On a bien,

$$\boxed{\forall A\in\mathbb{R}^2, (N_2(A)=0) \implies A=(0,0).}$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} N_2((\lambda x,\lambda y)) & = & \sqrt{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2} \\ & = & \sqrt{\lambda^2(x^2+y^2)} \\ & = & |\lambda|\sqrt{x^2+y^2} \\ & = & |\lambda| N_2((x,y)) \end{array}$$

On a bien

$$\boxed{\forall A\in\mathbb{R}^2, \forall\lambda\in\mathbb{R}, N_2(\lambda A)=|\lambda|N_2(A).}$$

Soient $(x,y)\in\mathbb{R}^2, (z,t)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{array}{rcl} N_2((x,y)+(z,t)) & = & N_2((x+z,y+t)) \\ & = & \sqrt{(x+z)^2+(y+t)^2} \end{array}$$

Posons $\alpha=x+iy$ et $\beta=z+it$. Constatons que

$$N_2((x,y)+(z,t))=|\alpha+\beta|$$

D'après l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$, on a donc

$$|\alpha+\beta|\leq|\alpha|+|\beta|.$$

Or $|\alpha|=N_2((x,y))$ et $|\beta|=N_2((z,t))$. D'où

$$N_2((x,y)+(z,t))\leq N_2((x,y))+N_2((z,t)).$$

On a donc

$$\boxed{\forall A\in\mathbb{R}^2, \forall B\in\mathbb{R}^2, N_2(A+B)\leq N_2(A)+N_2(B)}.$$

N_2 vérifie bien les trois propriétés d'une norme. Donc N_2 est une norme.

(c) Montrons que N_∞ est une norme. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. Supposons que $N_\infty((x,y))=0$. On a

$$\max(|x|,|y|)=0$$

Donc

$$|x|\leq 0, |y|\leq 0.$$

Par positivité des valeurs absolues, on a donc $|x|=0, |y|=0$. Autrement dit, $x=0, y=0$. On a bien,

$$\boxed{\forall A\in\mathbb{R}^2, (N_\infty(A)=0) \implies A=(0,0).}$$

Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{array}{rcl} N_\infty((\lambda x,\lambda y)) & = & \max(|\lambda x|,|\lambda y|) \\ & = & \max(|\lambda||x|,|\lambda||y|) \\ & = & |\lambda|\max(|x|,|y|) \\ & = & |\lambda| N_\infty((x,y)) \end{array}$$

On a bien

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N_\infty(\lambda A) = |\lambda| N_\infty(A).}$$

Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2, (z, t) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{array}{rcll} N_\infty((x,y) + (z,t)) & = & N_\infty((x+z, y+t)) & \\ & = & \max(|x+z|, |y+t|) & \\ & \leq & \max(|x| + |z|, |y| + |t|) & \text{par inégalité triangulaire} \end{array}$$

Mais $|x| \leq N_\infty((x,y))$ et $|z| \leq N_\infty((z,t))$. Donc $\underline{|x| + |z| \leq N_\infty((x,y)) + N_\infty((z,t))}$.
De la même façon, $|y| \leq N_\infty((x,y))$ et $|t| \leq N_\infty((z,t))$. Donc $\underline{|y| + |t| \leq N_\infty((x,y)) + N_\infty((z,t))}$.
Donc :

$$\max(|x| + |z|, |y| + |t|) \leq N_\infty((x,y)) + N_\infty((z,t)).$$

On a donc

$$\boxed{\forall A \in \mathbb{R}^2, \forall B \in \mathbb{R}^2, N_\infty(A + B) \leq N_\infty(A) + N_\infty(B)}.$$

N_∞ vérifie bien les trois propriétés d'une norme. Donc N_∞ est une norme.

4. Soit $A = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$x^2 \leq x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y| \text{ et } y^2 \leq x^2 + y^2 \leq x^2 + y^2 + 2|x||y|$$

par positivité des carrés et des valeurs absolues. Par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit que

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y| \text{ et } |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq |x| + |y|.$$

Il en résulte que :

$$N_\infty((x,y)) \leq N_2((x,y)) \leq N_1((x,y)).$$

De plus, $N_1((x,y)) = |x| + |y| \leq N_\infty((x,y)) + N_\infty((x,y) = 2N_\infty((x,y))$. D'où :

$$N_\infty((x,y)) \leq N_2((x,y)) \leq N_1((x,y)) \leq 2N_\infty((x,y)).$$

Il en résulte que N_2 est équivalente à N_∞ et que N_1 est équivalente à N_∞. D'après les questions 1 et 2, on en déduit que ces trois normes sont équivalentes entre elles.