DM 3 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

— Devoir à rendre le 15 novembre.

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à calculer

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \min(k, n-k)\binom{n}{k}, B_n = \sum_{k=0}^{n} \max(k, n-k)\binom{n}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}, \min(k, n-k) + \max(k, n-k) = n$. Puis simplifier $A_n + B_n$.
2. Montrer que $A_n = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} n\binom{n-1}{k}$.
3. En déduire A_n, B_n.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut calculer la somme

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n+1} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i}.$$

1. Montrer que :
$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ i+1 \leq j \leq n+1}} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq i}} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i}$$
On pourra utiliser la symétrie des coefficients binomiaux.
2. On pose $I = \{0, \cdots, n\}$ et $J = \{0, \cdots, n+1\}$. Calculer
$$\sum_{(i,j) \in I \times J} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i}.$$
3. En déduire la valeur de S_n.

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E : 2\sin(x) = \sqrt{1+\sin(2x)} + \sqrt{1-\sin(2x)}$.

Exercice 4. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} + u_n.$$

1. Écrire une fonction Python `suite(n)` qui prend en argument un entier n et qui renvoit la valeur u_n.
2. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$. On note respectivement q_1, q_2 les deux solutions avec $q_1 < q_2$.
4. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $u_0 = a + b$ et $u_1 = aq_1 + bq_2$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a(q_1)^n + b(q_2)^n$.