DM 3 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

— Devoir à rendre le 15 novembre.

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à calculer

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \min(k, n-k) \binom{n}{k}, B_n = \sum_{k=0}^{n} \max(k, n-k) \binom{n}{k}.$$

1. Montrer que pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}, \min(k, n-k) + \max(k, n-k) = n$. Puis simplifier $A_n + B_n$.
2. Montrer que $A_n = \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} n\binom{n-1}{k}$.
3. En déduire A_n, B_n.

Correction

1. On a
$$A_n + B_n \quad = \quad \textstyle\sum_{k=0}^{n} (\min(k, n-k) + \max(k, n-k)) \binom{n}{k}$$
Or, pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$, $\min(k, n-k) + \max(k, n-k) = k + n - k$ ou $n - k + k$. Donc $\min(k, n-k) + \max(k, n-k) = k + n - k$.
Donc
$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^{n} n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$$
D'où
$$\boxed{A_n + B_n = n2^n.}$$

2. On a
$$\begin{array}{rcll} A_n & = & \sum_{k=0}^{n} \min(k, n-k)\binom{n}{k} & \\ & = & \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k\binom{n}{k} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n} (n-k)\binom{n}{k} & \\ & = & \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k\binom{n}{k} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} (n-k)\binom{n}{k} & \\ & = & \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} (n-k)\binom{n}{n-k} & \text{(symétrie)} \\ & = & \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} n\binom{n-1}{n-k-1} & \text{(formule du Pion)} \\ & = & \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} n\binom{n-1}{k-1} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} n\binom{n-1}{k} & \end{array}$$

3. Calculons A_n. En effectuant le changement de variable $k' = k - 1$ dans la première somme, on trouve
$$A_n = \sum_{k'=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} n\binom{n-1}{k} + \sum_{k=\lfloor \frac{n}{2} \rfloor+1}^{n-1} n\binom{n-1}{k}.$$
D'où
$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1} n\binom{n-1}{k} - n\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$
Donc
$$\boxed{A_n = n2^{n-1} - n\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}.$$

Or $B_n = n2^n - A_n$. Donc

$$B_n = n2^n - n2^{n-1} + n\binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Donc

$$\boxed{B_n = n\left(2^{n-1} + \binom{n-1}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}\right).}$$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On veut calculer la somme

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n+1} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i}.$$

1. Montrer que :

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ i+1 \leq j \leq n+1}} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq i}} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i}$$

   On pourra utiliser la symétrie des coefficients binomiaux.
2. On pose $I = \{0, \cdots, n\}$ et $J = \{0, \cdots, n+1\}$. Calculer

$$\sum_{(i,j) \in I \times J} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i}.$$

3. En déduire la valeur de S_n.

Correction

1. Montrons que :

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ i+1 \leq j \leq n+1}} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i} = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq i}} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i}$$

   Par symétrie des coefficients binomiaux, on a :

$$\sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ i+1 \leq j \leq n+1}} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i} = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ i+1 \leq j \leq n+1}} \binom{n+1}{n+1-j}\binom{n}{n-i}$$

   Effectuons le changement de variables suivants : $j' = n+1-j$ et $i' = n-i$. On a alors :

$$0 \leq i \leq n-1 \Leftrightarrow 0 \geq -i \geq -n+1$$

   D'où :

$$0 \leq i \leq n-1 \Leftrightarrow n \geq n-i \geq 1 \Leftrightarrow 1 \leq i' \leq n.$$

   De même,

$$i+1 \leq j \leq n+1 \Leftrightarrow -i-1 \geq -j \geq -n-1,$$

   D'où :

$$i+1 \leq j \leq n+1 \Leftrightarrow n-i-1 \geq n-j \geq -1,$$

   donc :

$$i+1 \leq j \leq n+1 \Leftrightarrow n-i \geq n+1-j \geq 0,$$

   On en déduit que :

$$i+1 \leq j \leq n+1 \Leftrightarrow i' \geq j' \geq 0,$$

   Il en résulte que :

$$\begin{array}{c} 0 \leq i \leq n-1 \\ \text{et} \\ i+1 \leq j \leq n \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 1 \leq i' \leq n \\ \text{et} \\ 0 \leq j' \leq i' \end{array}$$

   Donc :

$$\boxed{\sum_{\substack{0 \leq i \leq n-1 \\ i+1 \leq j \leq n+1}} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i} = \sum_{\substack{1 \leq i' \leq n \\ 0 \leq j' \leq i'}} \binom{n+1}{j'}\binom{n}{i'}} \tag{E}$$

2. On a :

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{(i,j)\in I\times J}\binom{n+1}{j}\binom{n}{i} &= \left(\textstyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\right)\left(\textstyle\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\right)\\
&= 2^n 2^{n+1} && \text{(formule du binome)}\\
&= \boxed{2^{2n+1}}
\end{aligned}$$

3. On pose :

$$S_n = \sum_{\substack{0\le i\le n-1\\ i+1\le j\le n+1}} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i}.$$

D'après l'égalité (E), on a :

$$2S_n = \sum_{\substack{0\le i\le n-1\\ i+1\le j\le n+1}} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i} + \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 0\le j\le i}} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i}$$

Visualisons l'ensemble de sommations :

$$\begin{array}{l|ccccc}
n+1 & + & + & \cdots & + & * \\
n & + & + & \cdots & + & \times \\
n-1 & + & + & + & \times & \times \\
. & + & + & + & \times & \times \\
. & + & + & \times & \times & \times \\
1 & + & \times & \times & \times & \times \\
0 & * & \times & \times & \times & \times \\
 & 0 & 1 & \cdots & n-1 & n
\end{array}$$

où les $+$ représentent l'ensemble d'indices de la première somme, et les $\times$ représentent l'ensemble d'indices de la deuxième somme, et les $*$ les indices qui ne sont dans aucune de ces deux sommes. On a donc :

$$2S_n = \sum_{(i,j)\in I\times J\setminus\{(0,0),(n,n+1)\}} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i},$$

où $I = \{0,\cdots,n\}$ et $J = \{0,\cdots,n+1\}$. D'où :

$$2S_n = \sum_{(i,j)\in I\times J} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i} - 2.$$

Or :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} \binom{n+1}{j}\binom{n}{i} = 2^{2n+1}.$$

D'où :

$$2S_n = 2^{2n+1} - 2,$$

donc :

$$\boxed{S_n = 2^{2n} - 1.}$$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $E : 2\sin(x) = \sqrt{1+\sin(2x)} + \sqrt{1-\sin(2x)}$.

Correction

Comme $|\sin(2x)| \le 1$ pour tout x réel, on en déduit que cette équation est bien définie pour tout réel. Raisonnons par équivalence. Supposons que l'on a :

$$\begin{array}{rlcl}
 & 2\sin(x) & = & \sqrt{1+\sin(2x)} + \sqrt{1-\sin(2x)} \\
\Leftrightarrow & 2\sin(x) & = & \sqrt{\cos(x)^2+\sin(x)^2+2\sin(x)\cos(x)} + \sqrt{\cos(x)^2+\sin(x)^2-2\sin(x)\cos(x)} \\
\Leftrightarrow & 2\sin(x) & = & \sqrt{(\cos(x)+\sin(x))^2} + \sqrt{(\cos(x)-\sin(x))^2} \\
\Leftrightarrow & 2\sin(x) & = & |\cos(x)+\sin(x)| + |\cos(x)-\sin(x)| \\
\Leftrightarrow & 4\sin(x)^2 & = & (\cos(x)+\sin(x))^2 + (\cos(x)-\sin(x))^2 + 2|\cos(x)^2-\sin(x)^2| \text{ et } \sin(x)\ge 0 \\
\Leftrightarrow & 4\sin(x)^2 & = & 2\cos(x)^2 + 2\sin(x)^2 + 2|\cos(2x)| \text{ et } \sin(x)\ge 0 \\
\Leftrightarrow & 4(\frac{1-\cos(2x)}{2}) & = & 2 + 2|\cos(2x)| \text{ et } \sin(x)\ge 0 \\
\Leftrightarrow & 2-2\cos(2x) & = & 2 + 2|\cos(2x)| \text{ et } \sin(x)\ge 0 \\
\Leftrightarrow & -\cos(2x) & = & |\cos(2x)| \text{ et } \sin(x)\ge 0 \\
\Leftrightarrow & \cos(2x)\le 0 & \text{et} & \sin(x)\ge 0
\end{array}$$

Or, pour $x \in [0, 2\pi]$, $\sin(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [0, \pi]$. On se restreint donc maintenant à l'intervalle $[0, \pi]$. Et sur cet intervalle,

$$\cos(2x) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{3\pi}{4}.$$

Comme ces deux fonctions sont 2π-périodiques, il en résulte que :

$$S = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right].$$

Exercice 4. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1, u_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = -2u_{n+1} + u_n.$$

1. Écrire une fonction Python `suite(n)` qui prend en argument un entier n et qui renvoit la valeur u_n.
2. Calculer u_2, u_3, u_4, u_5.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^2 + 2x - 1 = 0$. On note respectivement q_1, q_2 les deux solutions avec $q_1 < q_2$.
4. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $u_0 = a + b$ et $u_1 = aq_1 + bq_2$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = a(q_1)^n + b(q_2)^n$.

Correction

1.
```
def suite(n) :
    u0=1
    u1=1
    for _ in range(n) :
        u2=-2*u1+u0
        u0=u1
        u1=u2
    return u0
```

2. On a : $u_2 = -1, u_3 = 3, u_4 = -7, u_5 = 17$.
3. On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 8 > 0$ dont les solutions sont exactement $q_1 = -1 - \sqrt{2}, q_2 = -1 + \sqrt{2}$.
4. Après calculs, on obtient $a = \frac{\sqrt{1-\sqrt{2}}}{2}, b = \frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2}$
5. Cours sur les suites.