DM 4 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

— Devoir à rendre le 13 décembre

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. On considère un jeu de 52 cartes. On tire 13 cartes. On rappelle qu'une carte est caractérisée par une valeur (AS,deux,...,dix, valet, dame, roi) et une couleur (pique, coeur, trèfle, carreau).

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Déterminer le nombre de possibilités d'avoir 13 cartes de valeurs différentes.
3. Déterminer le nombre de possibilités de n'avoir aucun 2 dans sa main.
4. Déterminer le nombre de possibilités de n'avoir aucune "flush" (5 cartes de la même couleur).

Correction

(Résultat sans justification)

1. $\binom{52}{13}$: un tirage correspond à choisir 13 cartes parmi les 52 possibles. Autrement dit, cela revient à compter le nombre de 13-combinaisons d'un ensemble à 52 éléments.
2. 4^{13} : pour chaque valeur, on a quatre couleurs possibles. Comme il y a 13 valeurs, cela revient à compter le nombre de 13-listes d'un ensemble à quatre éléments.
3. $\binom{48}{13}$. On s'intéresse donc au tirage ne contenant aucun 2. Cela revient à compter le nombre de 13-combinaisons d'un ensemble à 48 éléments.
4. Cela donne comme manière de répartir les couleurs : $4,4,4,1$ ou $4,4,3,2$ ou $4,3,3,3$. Pour chaque manière de répartir, on a $4.13.\binom{13}{4}^3 + 12.\binom{13}{2}\binom{13}{3}\binom{13}{4}^2 + 4.\binom{13}{4}\binom{13}{3}^3$. En calculant, on obtient : $\boxed{222766089260}$.

Exercice 2. Une urne contient n boules noires et p boules blanches avec n et p des entiers strictement positifs.

1. On tire une à une toutes les boules de l'urne. Déterminer le nombre de tirages possibles.
2. Soit $k \in \{1, \cdots, n+p\}$. On note E_k l'ensemble des tirages dont la dernière boule noire est situé au rang k. Montrer que $(E_k)_{n \leq k \leq n+p}$ forme une partition de l'ensemble des tirages. En déduire la valeur de
$$S = \sum_{k=n}^{n+p} \binom{k-1}{n-1}.$$

Correction

1. En représentant un tirage comme l'ensemble des positions des boules noires, on constate alors qu'un tirage est représenté de manière unique par un sous-ensemble de taille n de $\{1, \cdots, n+p\}$. Réciproquement, à un sous-ensemble de taille n correspond un unique tirage. On en déduit qu'il y a exactement $\binom{n+p}{n}$ tirages.
2. Montrons que les (E_k) forment une partition de l'ensemble des tirages. On note E l'ensemble des tirages.
   — Soit $k \in \{n, \cdots, n+p\}$. Montrons que E_k est non vide. La configuration ayant $n-1$ boules noires entre 1 et $n-1$, et une boule noire noire en position k est un élément de E_k.
   — Soit $k \neq k'$. Montrons que $E_k \cap E_{k'} = \emptyset$. Soit $T \in E_k$. Donc la dernière boule noire tirée est en position k. Elle n'est donc pas en k'. Dont $T \notin E_{k'}$. Donc $E_k \cap E_{k'} = \emptyset$.

— Montrons que $\cup_{k=n}^{n+p} E_k = E$ par double inclusion.
Soit $T \in \cup_{k=n}^{n+p} E_k$. T est donc un tirage particulier, donc $T \in E$. On a bien $\cup_{k=n}^{n+p} E_k \subset E$.
Soit $T \in E$. Notons i la position de la dernière boule noire. On a $i \in \{n, \cdots, n+p\}$. En effet, comme il y a n boules noires, on doit avoir $i \geq n$. De plus, comme il y a au total $n+p$ boules, on a $i \geq n+p$. On a donc $T \in \cup_{k=n}^{n+p} E_k$. Donc l'autre inclusion est vérifiée.
On a bien $\sum_{k=n}^{n+p} E_k = E$.

3. Comme $(E_k)_{n \leq k \leq n+p}$ forme une partition de E, on en déduit que

$$\sum_{k=n}^{n+p} \mathrm{Card}(E_k) = \mathrm{Card}(E).$$

Or les éléments de E_k sont déterminer par la position des $n-1$ premières boules noires dont les positions possibles sont comprises entre 1 et $k-1$. On a donc $\mathrm{Card}(E_k) = \binom{k-1}{n-1}$. D'où

$$\sum_{k=n}^{n+p} \binom{n-1}{k-1} = \binom{n+p}{n}.$$

Exercice 3. On fixe $n \geq 1$.

1. Déterminer le nombre de surjections $f : \{1, 2, \ldots, n+1\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.
2. Déterminer le nombre d'injections $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n+1\}$.
3. Déterminer le nombre d'applications strictement croissantes $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, 5n\}$.
4. Déterminer le nombre d'applications croissantes $f : \{1, 2, \ldots, 5\} \to \{1, 2, \ldots, 5\}$.

Correction

1. On veut déterminer le nombre de surjections $f : \{1, 2, \ldots, n+1\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$.
Comme f est surjective, cela revient à choisir un élément de $\{1, 2, \ldots, n\}$ ayant exactement 2 antécédents puis à construire une bijection entre l'ensemble des antécédents privé de ces deux éléments vers l'ensemble des éléments restants.
Ce qui donne : $\binom{n}{2} \times (n-1)! = n! \frac{n-1}{2}$.
2. Compter le nombre d'injections $f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n+1\}$ revient à compter le nombre de n-listes sans répétitions de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ on a donc $(n+1)!$ possibilités.
3. Une application f strictement croissante est caractérisée par l'image de f. f étant dans ce cas injective, cela revient à compter le nombre de n-combinaisons d'un ensemble à $5n$ éléments. Il y en a donc $\binom{5n}{n}$.
4. (Sans trop de détail) On cherche le cardinal de l'ensemble des applications croissantes $f : \{1, 2, \ldots, 5\}$ vers $\{1, 2, \ldots, 5\}$. Pour cela, on partitionne suivant le cardinal de l'image de f.
   (a) $\mathrm{Card}(Im(f)) = 1$. Il y a 5 possibilités.
   (b) $\mathrm{Card}(Im(f)) = 2$. $\binom{5}{2}$ choix possibles pour les valeurs. Puis, en notant respectivement a, b les deux valeurs choisies, on a :

   $$[f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)] \in \{[a, b, b, b, b], [a, a, b, b, b], [a, a, a, b, b], [a, a, a, a, b]\}.$$

   Ce qui donne $\binom{5}{2} \cdot 4 = 40$ possibilités.
   (c) $\mathrm{Card}(Im(f)) = 3$. $\binom{5}{3}$ choix possibles pour les valeurs. Puis, en notant respectivement $a < b < c$ les valeurs choisies, il nous reste à choisir $i < j < 5$ tels que : $f(i) = a, f(j) = b, \forall i < k < j, f(k) = b$. Cela nous laisse $\binom{4}{2}$ possibilités. Ainsi, on a $\binom{5}{2}\binom{4}{2} = 60$ possibilités.
   (d) $\mathrm{Card}(Imf(f) = 4$. $\binom{5}{4}$ choix pour les valeurs. Puis, on a 4 choix pour la valeur ayant exactement 2 antécédents. Ce qui donne $\binom{5}{4} \cdot 4 = 20$.
   (e) $\mathrm{Card}(Im(f)) = 5$. Une unique possibilité.

   En sommant ces cardinaux, on obtient 126.

Exercice 4. On pose $S = \{0, 1, 2\}^4$. Soient A, B, C trois éléments distincts deux à deux de S. On dit que $\{A, B, C\}$ est un set si $(A + B + C) \in \{0, 3, 6\}^4$.

1. Combien y-a-t-il d'éléments dans S ?

2. Combien y-a-t-il de set ?

Correction

1. (4-liste d'un ensemble à trois éléments)$3^4 = 81$.
2. Soient a, b deux éléments de $\{0,1,2\}$. Constatons qu'il existe un unique élément $c \in \{0,1,2\}$ vérifiant $a+b+c \in \{0,3,6\}$. En effet, si $a = b$ alors il est nécessaire et suffisant de choisir $c = a = b$. Et si $a \neq b$, il est alors nécessaire et suffisant de choisir l'unique élément de $\{0,1,2\}$ différent de a et de b. Ainsi, étant donnés deux éléments A, B différents de S il existe un unique $C \in S$ tel que $\{A, B, C\}$ est un set. Du fait de la remarque précédente, étant donnée une 2-combinaison de S, il existe une unique façon de la compléter en un set. De plus étant donné un set $\{A, B, C\}$ il provient de trois 2-combinaisons différentes : $\{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}$. Ainsi, le nombre de sets est égal à $\frac{\binom{81}{2}}{3} = 1080$.