DM 5 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

— Devoir à rendre le 17 janvier.

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, on pose $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$\begin{array}{rccl} F_n : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_0^x \frac{1}{\cos(t)^n} dt. \end{array}$$

1. Pour tout $n \geq 1$, justifier que F_n est bien définie sur I.
2. Soit $p \geq 1$. On cherche à exprimer F_{2p} comme une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques usuelles.
   (a) À l'aide du changement de variable $u = \tan(t)$, montrer que la proposition suivante est vraie :
   $$\forall x \in I, F_{2p}(x) = \int_0^{\tan(x)} (1+u^2)^{p-1} du.$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall x \in I, F_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} \frac{\tan(x)^{2k+1}}{2k+1}.$$
3. Soit $p \geq 0$. On cherche à exprimer F_{2p+1} comme une combinaison linéaire de composées de fonctions usuelles.
   (a) Cas 1 : $p = 0$.
      i. En effectuant le changement de variable $u = \sin(t)$, montrer que
      $$\forall x \in I, F_1(x) = \int_0^{\sin(x)} \frac{1}{1-u^2} du.$$
      ii. Expliciter des réels a, b vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{1, -1\}, \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$.
      iii. En déduire une expression de F_1 comme une somme de composées de fonctions usuelles.
   (b) Cas 2 : $p > 0$.
      i. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
      $$\forall x \in I, (2p-1)F_{2p-1}(x) = (2p)F_{2p+1}(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)^{2p}}.$$
      ii. En déduire une expression de F_3 puis de F_5.
   (c) À l'aide de la relation de récurrence établie précédemment, montrer que
   $$\forall x \in I, F_{2p+1}(x) = \frac{\binom{2p}{p}}{4^p} F_1(x) + \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\binom{2p}{p}}{4^{p-k+1}} \frac{1}{(2k-1)\binom{2k-2}{k-1}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)^{2k}} \right).$$

Exercice 2. Résoudre le système d'inconnues réelles x, y, z

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} (-3-m)x & + & 2y & & & = & a \\ -3x & + & (1-m)y & - & z & = & b \\ 3x & & & + & (2-m)z & = & c \end{array} \right.$$

en fonction des paramètres réels m, a, b, c.