DM 5 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

- Devoir à rendre le 17 janvier.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Dans tout l'exercice, on pose $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$F_n : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x \frac{1}{\cos(t)^n} dt. \end{array}$$

1. Pour tout $n \geq 1$, justifier que F_n est bien définie sur I.
2. Soit $p \geq 1$. On cherche à exprimer F_{2p} comme une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques usuelles.
   (a) À l'aide du changement de variable $u = \tan(t)$, montrer que la proposition suivante est vraie :
   $$\forall x \in I, F_{2p}(x) = \int_0^{\tan(x)} (1+u^2)^{p-1} du.$$
   (b) En déduire que :
   $$\forall x \in I, F_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} \frac{\tan(x)^{2k+1}}{2k+1}.$$
3. Soit $p \geq 0$. On cherche à exprimer F_{2p+1} comme une combinaison linéaire de composées de fonctions usuelles.
   (a) Cas 1 : $p = 0$.
      i. En effectuant le changement de variable $u = \sin(t)$, montrer que
      $$\forall x \in I, F_1(x) = \int_0^{\sin(x)} \frac{1}{1-u^2} du.$$
      ii. Expliciter des réels a, b vérifiant $\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{1, -1\}, \frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$.
      iii. En déduire une expression de F_1 comme une somme de composées de fonctions usuelles.
   (b) Cas 2 : $p > 0$.
      i. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
      $$\forall x \in I, (2p-1)F_{2p-1}(x) = (2p)F_{2p+1}(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)^{2p}}.$$
      ii. En déduire une expression de F_3 puis de F_5.
   (c) À l'aide de la relation de récurrence établie précédemment, montrer que
   $$\forall x \in I, F_{2p+1}(x) = \frac{\binom{2p}{p}}{4^p} F_1(x) + \sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\binom{2p}{p}}{4^{p-k+1}} \frac{1}{(2k-1)\binom{2k-2}{k-1}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)^{2k}} \right).$$

Correction

Dans tout l'exercice, on pose $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$\begin{array}{rccl} F_n : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_0^x \frac{1}{\cos(t)^n} dt. \end{array}$$

1. Soit n un entier supérieur à 1. La fonction cos étant continue et ne s'annulant par sur I, on en déduit que $x \mapsto \frac{1}{\cos(x)^n}$ est définie et continue sur I. D'après le théorème fondammental de l'analyse, il en résulte que F_n est définie sur I.
2. Soit $p \geq 1$. On cherche à exprimer F_{2p} comme une combinaison linéaire de fonctions trigonométriques usuelles.
   (a) Soit $x \in I$. La fonction tan étant C^1 sur I donc en particulier sur $[0, x]$. Par conséquent, il est possible d'effectuer le changement de variable $u = \tan(t)$. On a :

$$u = \tan(t), du = \frac{1}{\cos(t)^2} dt$$

   et $\frac{1}{\cos(t)^2} = 1 + \tan(t)^2$. D'où

$$\begin{array}{rcl} F_{2p}(x) & = & \int_0^x \frac{1}{\cos(t)^{2p}} dt \\ & = & \int_0^x \frac{1}{\cos(t)^{2p-2}} \frac{dt}{\cos(t)^2} \\ & = & \int_0^x (1+\tan(t)^2)^{p-1} \frac{dt}{\cos(t)^2} \\ & = & \int_0^{\tan(x)} (1+u^2)^{p-1} du \end{array}.$$

   On a bien,

$$\boxed{\forall x \in I, F_{2p}(x) = \int_0^{\tan(x)} (1+u^2)^{p-1} du}.$$

   (b) Soit $x \in I$. On a, par linéarité de l'intégrale et d'après la formule du binôme :

$$F_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} \int_0^{\tan(x)} u^{2k} du.$$

   Donc

$$F_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} \frac{\tan(x)^{2k+1}}{2k+1}.$$

   D'où

$$\forall x \in I, F_{2p}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p-1}{k} \frac{\tan(x)^{2k+1}}{2k+1}.$$

3. Soit $p \geq 0$. On cherche à exprimer F_{2p+1} comme une combinaison linéaire de composées de fonctions usuelles.
   (a) Cas 1 : $p = 0$.
      i. Soit $x \in I$. La fonction sin étant C^1 sur $\mathbb{R}$ elle est en particulier C^1 $[0, x]$. Le changement de variable est donc possible et

$$u = \sin(t), du = \cos(t) dt.$$

      Donc

$$\frac{1}{\cos(t)} dt = \frac{1}{\cos(t)^2} \cos(t) dt.$$

      D'où

$$\frac{1}{\cos(t)} dt = \frac{1}{1-\sin(t)^2} \cos(t) dt.$$

      Autrement dit,

$$\frac{1}{\cos(t)} dt = \frac{1}{1-u^2} du.$$

      Il en résulte que

$$\int_0^x \frac{1}{\cos(t)} dt = \int_0^{\sin(x)} \frac{1}{1-u^2} du.$$

On a bien

$$\forall x \in I, F_1(x) = \int_0^{\sin(x)} \frac{1}{1-u^2} du.$$

ii. Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$. On a :

$$\frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Il suffit de poser $a = b = \frac{1}{2}$. On a bien :

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,1\}, \frac{1}{1-x^2} = \frac{\frac{1}{2}}{1+x} + \frac{\frac{1}{2}}{1-x}.$$

iii. Des calculs précédent, on en déduit que :

$$\forall x \in I, F_1(x) = \frac{1}{2}(\int_0^{\sin(x)} (\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u})du).$$

D'où

$$\forall x \in I, F_1(x) = \frac{1}{2}(-\ln(1-\sin(x)) + \ln(1+\sin(x))).$$

(b) Cas 2 : $p > 0$.

i. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall x \in I, (2p-1)F_{2p-1}(x) = (2p)F_{2p+1}(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)^{2p}}.$$

Soit $x \in I$.

$$F_{2p-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos(t)^{2p-1}} dt$$

Donc

$$\int_0^x \frac{1}{\cos(t)^{2p}} \cos(t)dt.$$

Définissons $u : [0,x] \to \mathbb{R}, v : [0,x] \to \mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in [0,x], u\,(t) = \frac{1}{\cos(t)^{2p}}, v\,(t) = \sin(t).$$

x étant dans $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, u et v sont bien C^1 sur $[0,x]$ et

$$\forall t \in [0,x], u'(t) = (2p)\sin(t)\cos(t)^{-(2p+1)}, v'(t) = \cos(t).$$

On peut donc effectuer une intégration par parties et

$$F_{2p-1}(x) = [\sin(t)\frac{1}{\cos(t)^{2p}}]_0^x - (2p)\int_0^x \frac{\sin(t)\sin(t)}{\cos(t)^{2p+1}} dt.$$

D'où

$$F_{2p-1}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^{2p}} - (2p)\int_0^x \frac{1-\cos(t)^2}{\cos(t)^{2p+1}} dt.$$

Donc

$$F_{2p-1}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^{2p}} - (2p)(F_{2p+1}(x) - F_{2p-1}(x)).$$

D'où

$$(1-2p)F_{2p-1}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)^{2p}} - (2p)F_{2p+1}(x).$$

En multipliant par -1 :

$$(2p-1)F_{2p-1}(x) = (2p)F_{2p+1}(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)^{2p}}.$$

ii. On a donc :

$$\forall x \in I, F_1(x) = 2F_3(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}.$$

D'où

$$\forall x \in I, F_3(x) = \frac{1}{2}F_1(x) + \frac{1}{2}\frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}.$$

et

$$\forall x \in I, 3F_3(x) = 4F_5(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)^4}.$$

Donc

$$\forall x \in I, F_5(x) = \frac{3}{4}F_3(x) + \frac{1}{4}\frac{\sin(x)}{\cos(x)^4}.$$

Autrement dit,

$$\forall x \in I, F_5(x) = \frac{3}{8}F_1(x) + \frac{3}{8}\frac{\sin(x)}{\cos(x)^2} + \frac{1}{4}\frac{\sin(x)}{\cos(x)^4}.$$

(c) Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on pose

$$P(p) : \forall x \in I, F_{2p+1}(x) = \frac{\binom{2p}{p}}{4^p}F_1(x) + \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\binom{2p}{p}}{4^{p-k+1}}\frac{1}{(2k-1)\binom{2k-2}{k-1}}\frac{\sin(x)}{\cos(x)^{2k}}\right)..$$

Démontrons P par récurrence.

i. Initialisation : $F_1 = F_1$. Donc $P(0)$ est vraie.

ii. Soit $p \in \mathbb{N}^\star$. Supposons que $P(p-1)$ est vraie. Montrons que $P(p)$ est vraie. D'après la formule de récurrence, de la question 3b, on a :

$$\forall x \in I, (2p-1)F_{2p-1}(x) = (2p)F_{2p+1}(x) - \frac{\sin(x)}{\cos(x)^{2p}}.$$

Donc :

$$\forall x \in I, F_{2p+1}(x) = \frac{2p-1}{2p}F_{2p-1}(x) + \frac{1}{2p\cos(x)^{2p}}.$$

D'où, d'après $P(p-1)$:

$$\forall x \in I, F_{2p+1}(x) = \frac{2p-1}{2p}\left(\frac{\binom{2(p-1)}{p-1}}{4^{p-1}}F_1(x) + \sum_{k=1}^{p-1}\left(\frac{\binom{2(p-1)}{p-1}}{4^{p-1-k+1}}\frac{1}{(2k-1)\binom{2k-2}{k-1}}\frac{\sin(x)}{\cos(x)^{2k}}\right).\right) + \frac{1}{2p\cos(x)^{2p}}.$$

Or, pour tout $k \in \{1, \ldots, p-1\}$,

$$\frac{2p-1}{2p}\left(\frac{\binom{2(p-1)}{p-1}}{4^{p-1-k+1}}\frac{1}{(2k-1)\binom{2k-2}{k-1}}\right) = \frac{(2p-1)2p}{4p^2}\frac{\binom{2p-2}{p-1}}{4^{p-k}(2k-1)\binom{2k-2}{k-1}}.$$

Donc :

$$\frac{2p-1}{2p}\left(\frac{\binom{2(p-1)}{p-1}}{4^{p-1-k+1}}\frac{1}{(2k-1)\binom{2k-2}{k-1}}\right) = \frac{\binom{2p}{p}}{4^{p+1-k}(2k-1)\binom{2k-2}{k-1}}.$$

D'où

$$\forall x \in I, F_{2p+1}(x) = \frac{\binom{2p}{p}}{4^p}F_1(x) + \sum_{k=1}^{p}\left(\frac{\binom{2p}{p}}{4^{p-k+1}}\frac{1}{(2k-1)\binom{2k-2}{k-1}}\frac{\sin(x)}{\cos(x)^{2k}}\right).$$

$P(p)$ est donc vraie.

iii. Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $P(p)$ est vraie.

Exercice 2. Résoudre le système d'inconnues réelles x, y, z

$$\begin{cases} (-3-m)x & + & 2y & & & = & a \\ -3x & + & (1-m)y & - & z & = & b \\ 3x & & & + & (2-m)z & = & c \end{cases}$$

en fonction des paramètres réels m, a, b, c.

Correction

Cas 1 : $m \neq -1, 0, 1$.

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{-am^2 + 3am - 2a - 2bm + 4b + 2c}{m\left(m^2 - 1\right)},\ \frac{3am - 3a - bm^2 - bm + 6b + cm + 3c}{m^3 - m},\ \frac{-3am + 3a - 6b - cm^2 - 2cm - 3c}{m\left(m^2 - 1\right)} \right) \right\}$$

Cas 2 : $m = 0$.

Le système a des solutions si et seulement si $-a + 2b + c = 0$ et dans ce cas :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{c}{3} - \frac{2z}{3},\ b + c - z,\ z \right), z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cas 3 : $m = -1$.

Le système a des solutions si et seulement si $c + 3b - 3a = 0$ et dans ce cas :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(a - b - z,\ \frac{3a}{2} - b - z,\ z \right), z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cas 4 : $m = 1$.

Le système a des solutions si et seulement si $b + c = 0$ et dans ce cas :

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(-\frac{b}{3} - \frac{z}{3},\ \frac{a}{2} - \frac{2b}{3} - \frac{2z}{3},\ z \right), z \in \mathbb{R} \right\}.$$