DM 6 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

- Devoir à rendre le 7 février
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. On veut résoudre l'équation différentielle définie par

$$\forall x > 0, x^2 y"(x) - 4xy'(x) + 4y(x) = \cos(\ln(x)) \tag{E}$$

1. En effectuant le changement de variable $x = e^u$, et le changement de fonction z définie par : $\forall u \in \mathbb{R}, z(u) = y(e^u)$, montrer z est solution de $\forall u \in \mathbb{R}, z"(u) - 5z'(u) + 4z(u) = \cos(u)$ si et seulement si y est solution de (E).
2. Résoudre l'équation $\forall u \in \mathbb{R}, (z" - 5z' + 4z)(u) = \cos(u)$. On cherchera une solution sous la forme $A\cos(u) + B\sin(u)$ avec A et B constants.
3. Résoudre l'équation (E).

Correction

1. Soit z solution de $z" - 5z' + 4z = \cos(u)$. Pour tout $x > 0$, on pose $y(x) = z(\ln(x))$.
   On a :
   $$\forall x > 0, y'(x) = z'(\ln(x))\frac{1}{x}, y"(x) = z"(\ln(x))\frac{1}{x^2} - z'(\ln(x))\frac{1}{x^2}.$$
   Donc :
   $$\forall x > 0, x^2 y"(x) - 4xy'(x) + 5y(x) = z"(\ln(x)) - z'(\ln(x)) - 4z'(\ln(x)) + 4z(\ln(x)).$$
   Donc
   $$\forall x > 0, x^2 y"(x) - 4xy'(x) + 5y(x) = z"(\ln(x)) - 5z'(\ln(x)) + 4z(\ln(x)).$$
   Or $z" - 5z' + 4z = \cos(u)$. On a donc
   $$\forall x > 0, x^2 y"(x) - 4xy'(x) + 5y(x) = \cos(\ln(x)).$$
   Réciproquement, supposons que y est solution de (E). Pour tout $u \in \mathbb{R}$, on pose $z(u) = y(e^u)$. Montrons que $z" - 5z' + 4z = \cos(u)$. On a
   $$\forall u \in \mathbb{R}, z'(u) = y'(e^u)e^u, z"(u) = y"(e^u)e^{2u} + y'(e^u)e^u.$$
   D'où
   $$\forall u \in \mathbb{R}, z"(u) - 5z'(u) + 4z(u) = e^{2u}y"(e^u) - 4e^u y'(e^u) + 4y(e^u).$$
   Par hypothèse sur y, on en déduit que
   $$\forall u \in \mathbb{R}, z"(u) - 5z'(u) + 4z(u) = \cos(\ln(e^u)) = \cos(u).$$
2. Résolution de l'équation homogène :
   $$S_H = \{f : u \mapsto Ae^u + Be^{4u}, (A, B) \in \mathbb{R}^2\}.$$
   Détermination d'une solution. On cherche une solution de la forme $g(u) = A\cos(u) + B\sin(u)$.
   On a
   $$\forall u \in \mathbb{R}, g'(u) = -A\sin(u) + B\cos(u), g"(u) = -A\cos(u) - B\sin(u).$$

g est solution si et seulement si

$$\forall u \in \mathbb{R}, (3A-5B)\cos(u) + (5A+3B)\sin(u) = \cos(u).$$

Il suffit donc d'avoir $3A-5B=1, 5A+3B=0$. En résolvant le système, on en déduit que $A=\frac{3}{34}, B=\frac{-5}{34}$. On a donc

$$S = \left\{ \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \frac{3}{34}\cos(u) - \frac{5}{34}\sin(u) + \lambda_1 e^u + \lambda_2 e^{4u} \end{array} (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3. En appliquant le changement de variable, on en déduit l'ensemble des solutions pour (E) :

$$S = \left\{ \begin{array}{llll} f: & \mathbb{R}^\star & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{3}{34}\cos(\ln(x)) - \frac{5}{34}\sin(\ln(x)) + \lambda_1 x + \lambda_2 x^4 \end{array} (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 2. 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(a) Etudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

(b) Calculer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ à l'abscisse 0.

(c) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de T. Préciser les points d'intersection.

(d) Construire $\mathcal{C}$ et T .

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{{u_n}^2+u_n+1} \end{cases}$

(a) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que : $f(\dfrac{1}{p}) \leq \dfrac{1}{p+1}$.

(b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que : $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$

(e) En déduire par récurrence et à l'aide du 2.(b) que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{u_n} \leq n+1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

(f) Justifier que pour tout entier $k \geq 2$, $\quad \dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x}$.

(g) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leq \ln(n)$ et que $\dfrac{1}{u_n} \leq n+2+\ln(n)$.

(h) A l'aide des résultats précédents, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.

Correction

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+x+1}$

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

(a) Pour tout $x \in \mathbb{R}, x^2+x+1 > 0$ car le discriminant Δ de ce polynôme du second degré est égal à $1-4<0$ et que son coefficient dominant est strictement positif. Donc f est définie, continue, et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de polynôme dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\left(x^2+x+1\right)-(2x+1)\,x}{x^2+x+1} = \frac{x^2+x+1-2x^2-x}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2}$$

Donc f' est positive sur $[-1,1]$ et f' est négative sur les intervalles $]-\infty,-1]$ et sur $[1,+\infty[$ et la dérivée s'annule uniquement en -1 et 1. Il en résulte que

— f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$,

— f est strictement croissante sur $[-1, 1]$,

— f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$.

Calculons les limites aux infinis. Pour tout $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + x + 1} = \frac{x}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

On en déduit, par opérations usuelles sur les limites :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.$$

(b) En 0, $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ La tangente a donc pour équation $y = x$.

(c) les positions relatives de C et T sont données par le signe de $f(x) - x$. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - x = \frac{x}{x^2 + x + 1} - x = \frac{x - x\left(x^2 + x + 1\right)}{x^2 + x + 1} = \frac{-x^3 - x^2}{x^2 + x + 1} = \frac{-x^2(x + 1)}{x^2 + x + 1}$$

x	-∞		-1		0		1		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$-$		$-$	

On en déduit que les courbes C et T s'intersectent en 0 et -1, que la courbe de C est au-dessus de T sur $]-\infty, -1]$ et qu'elle est en-dessous sur $[1, +\infty[$.

(d) Voir sur votre calculatrice !

2. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier } n,\ u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{u_n^2 + u_n + 1}$$

(a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ On a

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} + 1} = \frac{p}{1 + p + p^2}$$

donc

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{p}\right) - \frac{1}{p+1} &= \frac{p}{1 + p + p^2} - \frac{1}{p+1} \\ &= \frac{p(p+1) - \left(1 + p + p^2\right)}{\left(1 + p + p^2\right)(p+1)} \\ &= \frac{-1}{\left(1 + p + p^2\right)(p+1)} \leq 0. \end{aligned}$$

On a bien : $\boxed{f\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{p}{1 + p + p^2} \leq \frac{1}{p+1}}$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P(n) : 0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}.$$

— Initialisation : Pour $n = 0, 0 < u_0 = 1 \leq \frac{1}{0+1}$.

— Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. D'après $P(n)$, on a : $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

La fonction f étant strictement croissante sur $[0, 1]$ et que 0, u_n et $\frac{1}{n+1}$ sont des éléments de ce segment, on a $f(0) < f(u_n) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$. De plus, d'après 2.a, $f\left(\frac{1}{n+1}\right) \leq \frac{1}{n+2}$ car $n + 1 \geq 1$.

Il en résulte que $0 < u_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$.

— Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que pour tout entier n, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

(c) Comme $\frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par encadrement on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$

3. (a) D'après les variations de f, pour $x \neq 0$, on a $f(x) \neq 0$. Et

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{x^2+x+1}{x} = x+1+\frac{1}{x}$$

Or pour tout entier n, $u_n \neq 0$

$$\frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{f(u_n)} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}$$

(b) Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$P(n) : \frac{1}{u_n} \leq n+1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

— Initialisation : pour $n=1$, on a

$$\frac{1}{u_1} = u_0 + 1 + \frac{1}{u_0} = 1+1+\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k}$$

$P(1)$ est donc vraie.

— Hérédité : soit $n \geq 1$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. D'après 2.d

$$\frac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \frac{1}{u_n}.$$

Or d'après 2.b, $u_n \leq \frac{1}{n+1}$ et d'après $P(n)$, $\frac{1}{u_n} \leq n+1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. D'où

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq \frac{1}{n+1} + 1 + n + 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Donc

$$\frac{1}{u_{n+1}} \leq n+2+\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}.$$

$P(n+1)$ est donc vraie.

— Conclusion : par récurrence, on en déduit que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{1}{u_n} \leq n+1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

4. (a) Soit $k \geq 2$.
Pour tout x de $[k-1,k]$ on a $k-1 \leq x \leq k$ donc $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{k}$ d'où, par croissance de l'intégrale : $\int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx \geq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{k} dx = \frac{1}{k}$

(b) Soit $n \geq 2$. On a :

$$\forall k \in \{2,3,\ldots,n\}, \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx.$$

En sommant ces inégalités, pour k de 2 à n :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x} dx = \int_{1}^{n} \frac{1}{x} dx = \ln(n) \text{ (relation de Chasles)}$$

D'après 2.e :

$$\frac{1}{u_n} \leq n+1+\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Par transitivité des inégalités, on en déduit que

$$\frac{1}{u_n} \leq n+2+\ln(n).$$

(c) On a donc, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+\star}$:

$$u_n \geq \frac{1}{n+2+\ln(n)} \text{ et } n \cdot u_n \geq \frac{n}{n+2+\ln(n)}$$

d'où, à l'aide de la question 2.b, on obtient l'encadrement :

$$\underbrace{\frac{1}{1+2/n+\ln(n)/n}}_{\to 1} = \frac{n}{n+2+\ln(n)} \leq n \cdot u_n \leq \frac{n}{n+1} = \underbrace{\frac{1}{1+1/n}}_{\to 1}$$

car par croissances comparées, $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$. Donc, d'après le théorème des gendarmes, $n \cdot u_n$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.