DM 6 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

— Devoir à rendre le 7 février

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. On veut résoudre l'équation différentielle définie par

$$\forall x > 0, x^2 y"(x) - 4xy'(x) + 4y(x) = \cos(\ln(x)) \tag{E}$$

1. En effectuant le changement de variable $x = e^u$, et le changement de fonction z définie par : $\forall u \in \mathbb{R}, z(u) = y(e^u)$, montrer z est solution de $\forall u \in \mathbb{R}, z"(u) - 5z'(u + 4z(u) = \cos(u)$ si et seulement si y est solution de (E).
2. Résoudre l'équation $\forall u \in \mathbb{R}, (z" - 5z' + 4z)(u) = \cos(u)$. On cherchera une solution sous la forme $A\cos(u) + B\sin(u)$ avec A et B constants.
3. Résoudre l'équation (E).

Exercice 2.

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$.

   On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

   (a) Etudier les variations de f ainsi que ses limites en $-\infty$ et $+\infty$.

   (b) Calculer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ à l'abscisse 0.

   (c) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et de T. Préciser les points d'intersection.

   (d) Construire $\mathcal{C}$ et T .

2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{{u_n}^2 + u_n + 1} \end{cases}$

   (a) Soit p un entier naturel non nul. Montrer que : $f(\dfrac{1}{p}) \leq \dfrac{1}{p+1}$.

   (b) En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$

   (c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que : $\dfrac{1}{u_{n+1}} = u_n + 1 + \dfrac{1}{u_n}$

   (e) En déduire par récurrence et à l'aide du 2.(b) que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{u_n} \leq n + 1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

   (f) Justifier que pour tout entier $k \geq 2$, $\quad \dfrac{1}{k} \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} \dfrac{dx}{x}$.

   (g) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{1}{k} \leq \ln(n)$ et que $\dfrac{1}{u_n} \leq n + 2 + \ln(n)$.

   (h) A l'aide des résultats précédents, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n$.