DS 1 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Montrer que pour tout entier naturel n, l'égalité $1+3+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2$ est vraie.

Exercice 2. Résoudre les équations d'inconnu réel x suivantes :

1. $\sqrt{x(x+2)} = x+\frac{5}{4}$ 2. $|x+3| = 2x+1$ 3. $\frac{x^2+x+1}{2x^2-1} = 1$ 4. $x^4+3x^2+1=0$.

Exercice 3. Résoudre les inéquations d'inconnu réel x suivantes :

1. $\frac{x^2+2x-1}{3x^2-1} \leq 1$ 2. $\sqrt{x(x-1)} \leq 1$ 3. $|2x+3|-|3x-1| \geq 0$.

Exercice 4. L'objectif de cet exercice est de décrire l'ensemble A défini par : $A=\left\{7n+8m, (n,m)\in\mathbb{N}^2\right\}$.

Pour cela, on commence par établir quelques propriétés qui seront utiles pour la suite.

1. Montrer que pour tout entier naturel k, il existe $(q,r)\in\mathbb{N}\times\{0,1,\ldots,6\}$ tel que : $k=7q+r$. On pourra démontrer la proposition suivante par récurrence :
$$\forall k\in\mathbb{N}, P(k) : \exists (q,r)\in\mathbb{N}\times\{0,1,\ldots,6\}, k=7q+r.$$
2. Soient $k\in\mathbb{N}$, $(q_1,r_1)\in\mathbb{N}\times\{0,1,\ldots,6\}$, $(q_2,r_2)\in\mathbb{N}\times\{0,1,\ldots,6\}$. On suppose que $k=7q_1+r_1$ et $k=7q_2+r_2$. Montrer que $q_1=q_2, r_1=r_2$.
Ainsi, pour tout entier naturel k, il existe un unique couple $(q,r)\in\mathbb{N}\times\{0,1,\ldots,6\}$ tel que $k=7q+r$. On pourra dans la suite utiliser ce résultat.
3. Montrer qu'il existe un entier naturel n qui n'est pas un élément de A.
4. Décrire tous les éléments de A inférieurs strictement à 42.
5. Montrer que tout entier naturel $n\geq 42$ est un élément de A.
6. Déterminer le plus grand entier k_0 qui n'est pas élément de A et tel que tout entier $n>k_0$ est un élément de A.
7. En déduire qu'il existe $a_1<a_2<\ldots<a_k<a$ des entiers à déterminer tels que $A=\{a_1,a_2,...,a_k\}\cup\{n\in\mathbb{N}|n\geq a\}$.

Exercice 5. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit a un élément de A. On dit que a est un point isolé de A si :
$$\exists\varepsilon>0,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A=\{a\}.$$
Sinon, on dit que a est un point d'accumulation de A. On rappelle que la proposition
$$P : \forall M>0, \exists N\in\mathbb{N}, 2^N>M$$
est vraie. Dans la suite, on pourra utiliser la proposition P sans la démontrer.

1. Donner une définition composée uniquement de symboles mathématiques de "a est un point d'accumulation de A".
2. Montrer que a est un point isolé de A si et seulement si $(\exists\varepsilon>0, [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\cap A=\{a\})$.
3. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}$ n'a pas de point isolé.
4. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de point d'accumulation.
5. On pose $U=\left\{\frac{1}{2^n}, n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{0\}$. Montrer que 0 est le seul et unique point d'accumulation de U.

Exercice 6. Résoudre l'équation d'inconnu réel x en fonction du paramètre réel m suivante :
$$|mx-1|+|2-m|=2.$$