DS 1 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Montrer que pour tout entier naturel n, l'égalité $1+3+\ldots+(2n+1)=(n+1)^2$ est vraie.

Correction

Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = 1+3+\ldots+(2n+1)$ et

$$P(n) : S_n = (n+1)^2.$$

Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $P(n)$ est vraie.

- Initialisation : $S_0 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$. Donc $P(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(n)$ est vraie. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. Par définition de S_{n+1},

  $$S_{n+1} = S_n + (2n+3).$$

  D'après $P(n)$, $S_n = (n+1)^2$. Donc

  $$S_{n+1} = (n+1)^2 + (2n+3).$$

  D'où

  $$S_{n+1} = n^2 + 2n + 1 + 2n + 3.$$

  Donc

  $$S_{n+1} = n^2 + 4n + 4$$

  Autrement dit, $S_{n+1} = (n+2)^2 = ((n+1)+1)^2$.
  $P(n+1)$ est donc vraie.
- Conclusion : d'après le principe de récurrence, on en déduit que

  $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, S_n = (n+1)^2}.$$

Exercice 2. Résoudre les équations d'inconnu réel x suivantes :

1. $\sqrt{x(x+2)} = x + \frac{5}{4}$ 2. $|x+3| = 2x+1$ 3. $\frac{x^2+x+1}{2x^2-1} = 1$ 4. $x^4 + 3x^2 + 1 = 0$.

Correction

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x(x+2)} = x + \frac{5}{4}$. Remarquons que cette équation est définie si et seulement si $x(x+2) \geq 0$. Autrement dit, elle est définie si et seulement si $x \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$. Désormais, on fixe $x \in]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$.

Raisonnons par équivalence.

$$\begin{aligned}
\sqrt{x(x+2)} = x + \tfrac{5}{4} &\iff x(x+2) = (x+\tfrac{5}{4})^2 && \text{et } x + \tfrac{5}{4} \geq 0 \\
&\iff x^2 + 2x = (x+\tfrac{5}{4})^2 && \text{et } x + \tfrac{5}{4} \geq 0 \\
&\iff x^2 + 2x = x^2 + \tfrac{5}{2}x + \tfrac{25}{16} && \text{et } x + \tfrac{5}{4} \geq 0 \\
&\iff \tfrac{-1}{2}x = \tfrac{25}{16} && \text{et } x + \tfrac{5}{4} \geq 0 \\
&\iff x = \tfrac{-25}{8} && \text{et } x + \tfrac{5}{4} \geq 0 \\
&\iff x = \tfrac{-25}{8} && \text{et } \tfrac{-25}{8} + \tfrac{5}{4} \geq 0 \\
&\iff x = \tfrac{-25}{8} && \text{et } \tfrac{-15}{8} \geq 0 \\
&\iff \text{FAUX}
\end{aligned}.$$

Par équivalence, on en déduit que cette équation n'a pas de solution réelle. Autrement dit, $\boxed{S = \emptyset}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
|x+3| = 2x+1 &\iff |x+3|^2 = (2x+1)^2 && \text{et } 2x+1 \geq 0 \\
&\iff (x+3)^2 = (2x+1)^2 && \text{et } 2x+1 \geq 0 \\
&\iff x^2 + 6x + 9 = 4x^2 + 4x + 1 && \text{et } 2x+1 \geq 0 \\
&\iff -3x^2 + 2x + 8 = 0 && \text{et } 2x+1 \geq 0
\end{aligned}.$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $2^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-3) = 100$. Les solutions de cette équation sont donc exactement $x = \frac{-2+10}{-6} = \frac{-4}{3}$ ou $x = \frac{-2-10}{-6} = 2$. Donc :

$$|x+3| = 2x+1 \iff (x = \frac{-4}{3} \text{ ou } x = 2) \text{ et } 2x+1 \geq 0.$$

Or $-\frac{8}{3} + 1 = -\frac{5}{3} < 0$ et $2 \cdot 2 + 1 = 5 \geq 0$. D'où :

$$|x+3| = 2x+1 \iff x = 2.$$

On en déduit que $\boxed{S = \{2\}}$.

3. Remarquons que l'équation est définie si et seulement si $2x^2 - 1 \neq 0$. Autrement dit, sil et seulement si $x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \neq \frac{-\sqrt{2}}{2}$. Désormais, on fixe $x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\}$. On raisonne par équivalence.

$$\begin{aligned}
\tfrac{x^2+x+1}{2x^2-1} = 1 &\iff \tfrac{x^2+x+1}{2x^2-1} - \tfrac{2x^2-1}{2x^2-1} = 0 \\
&\iff \tfrac{-x^2+x+2}{2x^2-1} = 0 \\
&\iff -x^2 + x + 2 = 0
\end{aligned}.$$

On reconnaît une équation du second degré avec -1 comme solution évidente. L'autre solution est alors 2. Ces deux valeurs sont bien différentes de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc

$$\frac{x^2+x+1}{2x^2-1} = 1 \iff x = -1 \text{ ou } x = 2.$$

Donc : $\boxed{S = \{-1, 2\}}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = x^2$. Raisonnons par équivalence :
$$x^4 + 3x^2 + 1 = 0 \iff X^2 + 3X + 1 = 0 \quad \text{et } X = x^2 \quad .$$
On reconnaît une équation du second degré de discriminant $\Delta = 9 - 4 = 5 > 0$. L'équation $X^2 + 3X + 1 = 0$ a donc exactement deux solutions : $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$. D'où
$$x^4 + 3x^2 + 1 = 0 \iff \left(X \in \left\{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right\}\right) \quad \text{et } X = x^2 \quad .$$
Or $9 \geq 5 > 0$. Donc $3 \geq \sqrt{5}$. $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ est donc négatif. $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ étant strictement négatif, et comme $X = x^2 \geq 0$, on en déduit que l'équation n'a pas de solution.
Donc : $\boxed{S = \emptyset.}$

Exercice 3. Résoudre les inéquations d'inconnu réel x suivantes :

1. $\frac{x^2+2x-1}{3x^2-1} \leq 1$ 2. $\sqrt{x(x-1)} \leq 1$ 3. $|2x+3| - |3x-1| \geq 0$.

Correction

1. Constatons que l'inéquation est définie si et seulement si $x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{-\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\}$. On fixe désormais un réel x différent de $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ et de $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Raisonnons par équivalence :
$$\begin{aligned}
\frac{x^2+2x-1}{3x^2-1} \leq 1 &\iff \frac{x^2+2x-1}{3x^2-1} - 1 \leq 0 \\
&\iff \frac{x^2+2x-1}{3x^2-1} - 1 \leq 0 \\
&\iff \frac{x^2+2x-1-(3x^2-1)}{3x^2-1} \leq 0 \\
&\iff \frac{-2x^2+2x}{3x^2-1} \leq 0 \\
&\iff \frac{2x(1-x)}{3x^2-1} \leq 0 \\
&\iff \big(2x(1-x) \geq 0 \text{ et } (3x^2-1 < 0\big) \text{ ou } \big(2x(1-x) \leq 0 \text{ et } (3x^2-1 > 0)\big) \\
&\iff \left(x \in [0,1] \text{ et } x \in]-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}[\right) \text{ ou } \left(x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\text{ et } x \in]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty[\right)
\end{aligned}$$
Or $-\frac{\sqrt{3}}{3} < 0 < \frac{\sqrt{3}}{3} < 1$. Donc :
$$[0,1]\cap]-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}[= [0, \frac{\sqrt{3}}{3}[, \big(]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\big) \cap \big(]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty[\big) =]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}[\cup[1, +\infty[$$
Il en résulte que
$$\boxed{S = [0, \frac{\sqrt{3}}{3}[\cup]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}[\cup[1, +\infty[}.$$

2. Remarquons que l'inéquation est définie si et seulement si $x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$. Soit $x \in]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$. Raisonnons par équivalence :
$$\begin{aligned}
\sqrt{x(x-1)} \leq 1 &\iff x(x-1) \leq 1 \text{ et } x(x-1) \geq 0 \qquad \text{par stricte croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}^+ \\
&\iff x^2 - x - 1 \leq 0 \text{ et } x(x-1) \geq 0
\end{aligned}$$
Or $x^2 - x - 1 \leq 0$ est une inéquation du second degré de discriminant $\Delta = 1 - 4(-1) = 5 > 0$. Les racines du polynôme correspondant son exactement $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. D'où :
$$\begin{aligned}
\sqrt{x(x-1)} \leq 1 &\iff x \in [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}] \text{ et } x(x-1) \geq 0 \\
&\iff x \in [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}] \text{ et } x(x-1) \geq 0
\end{aligned}$$

Or $0 < 1 < 5$. Donc par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}^+$, $0 < 1 < \sqrt{5}$. D'où :

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0 < 1 < \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Donc :

$$[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}] \cap (]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[) = [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0] \cup [1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}].$$

D'où

$$\sqrt{x(x-1)} \leq 1 \iff x \in [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0] \cup [1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}].$$

Par conséquent,

$$\boxed{S = [\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0] \cup [1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}]}.$$

3. L'équation est bien définie sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
|2x+3| - |3x-1| \geq 0 &\iff |2x+3| \geq |3x-1| \\
&\iff |2x+3|^2 \geq |3x-1|^2 \qquad \text{par positivité des valeurs absolues et stricte croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}^+ \\
&\iff (2x+3)^2 \geq (3x-1)^2 \\
&\iff (2x+3)^2 - (3x-1)^2 \geq 0 \\
&\iff ((2x+3) - (3x-1))\,((2x+3) + (3x-1)) \geq 0 \\
&\iff (-x+4)\,(5x+2) \geq 0 \\
&\iff (x-4)\,(5x+2) \leq 0 \\
&\iff x \in [-\tfrac{2}{5}, 4]
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{S = [-\frac{2}{5}, 4]}$.

Exercice 4. L'objectif de cet exercice est de décrire l'ensemble A défini par : $A = \left\{7n + 8m, (n, m) \in \mathbb{N}^2\right\}$.
Pour cela, on commence par établir quelques propriétés qui seront utiles pour la suite.

1. Montrer que pour tout entier naturel k, il existe $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, \ldots, 6\}$ tel que : $k = 7q + r$. On pourra démontrer la proposition suivante par récurrence :

$$\forall k \in \mathbb{N}, P(k) : \exists (q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, \ldots, 6\}, k = 7q + r.$$

2. Soient $k \in \mathbb{N}$, $(q_1, r_1) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, \ldots, 6\}$, $(q_2, r_2) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, \ldots, 6\}$. On suppose que $k = 7q_1 + r_1$ et $k = 7q_2 + r_2$. Montrer que $q_1 = q_2, r_1 = r_2$.
Ainsi, pour tout entier naturel k, il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, \ldots, 6\}$ tel que $k = 7q + r$. On pourra dans la suite utiliser ce résultat.
3. Montrer qu'il existe un entier naturel n qui n'est pas un élément de A.
4. Décrire tous les éléments de A inférieurs strictement à 42.
5. Montrer que tout entier naturel $n \geq 42$ est un élément de A.
6. Déterminer le plus grand entier k_0 qui n'est pas élément de A et tel que tout entier $n > k_0$ est un élément de A.
7. En déduire qu'il existe $a_1 < a_2 < \ldots < a_k < a$ des entiers à déterminer tels que $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\} \cup \{n \in \mathbb{N} | n \geq a\}$.

Correction

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose :

$$P(k) : \exists (q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, \ldots, 6\}, k = 7q + r.$$

Montrons que P est vraie par récurrence.

— Initialisation : $0 = 7 \cdot 0 + 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

— Hérédité : Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons que $P(k)$ est vraie. Montrons que $P(k+1)$ est vraie. D'après $P(k)$, il existe $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, \ldots, 6\}$ tel que $k = 7q + r$. Donc :

$$k + 1 = 7q + r + 1.$$

  — Cas 1 : $r < 6$. En posant $s = r + 1$. On a bien $s \in \{0, 1, \ldots, 6\}$.

  — Cas 2 : $r = 6$.
  On a alors $k + 1 = 7q + 7 = 7(q + 1) + 0$

  Par disjonctions de cas, on en déduit que $P(k+1)$ est vraie.

— Conclusion : on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ est vraie.

2. Soient $k \in \mathbb{N}$, $(q_1, r_1) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, \ldots, 6\}$, $(q_2, r_2) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, \ldots, 6\}$. Supposons que $k = 7q_1 + r_1$ et $k = 7q_2 + r_2$. On a alors :

$$7q_1 + r_1 = 7q_2 + r_2.$$

D'où : $7(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$. Notons $s = r_2 - r_1$. D'une part, r_1 et r_2 sont compris entre 0 et 6. Donc $-6 \leq r_2 - r_1 \leq 6$. Autrement dit, $s \in \{-6, -5, \ldots, 0, 1, \ldots, 6\}$. De plus, $(q_1 - q_2)$ est un entier. Donc $7(q_1 - q_2)$ est un multiple de 7. Donc s est également un multiple de 7. Or le seul multiple de 7 compris entre -6 et 6 est la valeur 0. Donc $s = 0$. Autrement dit, $\boxed{r_2 = r_1, q_1 = q_2}$.

3. Montrons que 1 n'est pas un élément de A. Soit $a \in A$. Il existe donc $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = 7n + 8m$. Cas 1 : $n \geq 1$ ou $m \geq 1$, on constate que $a \geq 7$. Cas 2 : $n = 0$ et $m = 0$. On a alors $a = 0$.
<u>Donc 1 n'est pas un élément de A</u>.

4. Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, si $n + m \geq 6$, on a alors $7n + 8m \geq 7n + 7m \geq 7(n + m) \geq 42$.
Pour décrire tous les éléments de A inférieurs strictement à 42 il suffit de considérer tous les couples $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ avec $n + m < 6$. Énumérons toutes les valeurs de A inférieures strictement à 42 :

$$0 = 7 \cdot 0 + 8 \cdot 0, \quad 7 = 7 \cdot 1 + 8 \cdot 0, \quad 8 = 7 \cdot 0 + 8 \cdot 1, \quad 14 = 7 \cdot 2 + 8 \cdot 0, \quad 15 = 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1,$$

$$16 = 7 \cdot 0 + 8 \cdot 2, \quad 21 = 7 \cdot 3 + 8 \cdot 0, \quad 22 = 7 \cdot 2 + 8 \cdot 1, \quad 23 = 7 \cdot 1 + 8 \cdot 2, \quad 24 = 7 \cdot 0 + 8 \cdot 3,$$

$$28 = 7 \cdot 4 + 8 \cdot 0, \quad 29 = 7 \cdot 3 + 8 \cdot 1, \quad 30 = 7 \cdot 2 + 8 \cdot 2, \quad 31 = 7 \cdot 1 + 8 \cdot 3, \quad 32 = 7 \cdot 0 + 8 \cdot 4,$$

$$35 = 7 \cdot 5 + 8 \cdot 0, \quad 36 = 7 \cdot 4 + 8 \cdot 1, \quad 37 = 7 \cdot 3 + 8 \cdot 2, \quad 38 = 7 \cdot 2 + 8 \cdot 3, \quad 39 = 7 \cdot 1 + 8 \cdot 4,$$

$$40 = 7 \cdot 0 + 8 \cdot 5,$$

Des différents calculs, on en déduit que les éléments de A strictement plus petits que 42 sont :

$$\boxed{0, 7, 8, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 36, 37, 38, 39, 40}.$$

5. Soit un entier $n \geq 42$. D'après la question 1, il existe $(q, r) \in \mathbb{N} \times \{0, 1, \ldots, 6\}$ tel que $n = 7q + r$. Or $8 - 7 = 1$. Donc

$$n = 7q + (8 - 7)r.$$

D'où $n = 7(q - r) + 8r$. Or $n \geq 42$. Donc nécessairement, $q \geq 6$. Mais $r \in \{0, \ldots, 6\}$. Donc $q - r \geq 0$. Par conséquent, $(q - r)$ et r sont bien des entiers naturels. n est bien un élément de A. Conclusion :

$$\boxed{\{n \in \mathbb{N} | n \geq 42\} \subset A.}$$

6. Des questions 4 et 5, on en déduit que <u>41</u> n'est pas un élément de A et tout entier strictement plus grand que 41 est un élément de A.

7. Des questions 4 et 5, on en déduit la description suivante de A

$$\boxed{A = \{0, 7, 8, 14, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31, 32, 35, 36, 37, 38, 39, 40\} \cup \{n \in \mathbb{N} | n \geq 42\}}.$$

Exercice 5. Soit A une partie de $\mathbb{R}$ et soit a un élément de A. On dit que a est un point isolé de A si :

$$\exists \varepsilon > 0,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A = \{a\}\,.$$

Sinon, on dit que a est un point d'accumulation de A. On rappelle que la proposition

$$P : \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N}, 2^N > M$$

est vraie. Dans la suite, on pourra utiliser la proposition P sans la démontrer.

1. Donner une définition composée uniquement de symboles mathématiques de "a est un point d'accumulation de A".
2. Montrer que a est un point isolé de A si et seulement si $(\exists \varepsilon > 0, [a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap A = \{a\})$.
3. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}$ n'a pas de point isolé.
4. Montrer que l'ensemble $\mathbb{N}$ n'a pas de point d'accumulation.
5. On pose $U = \left\{\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$. Montrer que 0 est le seul et unique point d'accumulation de U.

Correction

1. Voici une définition formelle de "a est un point d'accumulation de A" :

$$\forall \varepsilon > 0,]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A \neq \{a\}.$$

2. Supposons que a est un point isolé de A. Il existe donc $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha, a+\alpha[\cap A = \{a\}$. Posons alors $\epsilon = \frac{\alpha}{2}$. On a donc

$$a - \alpha < a - \frac{\alpha}{2} < a < a + \frac{\alpha}{2} < a + \alpha.$$

Donc $[a - \frac{\alpha}{2}, a + \frac{\alpha}{2}] \subset]a-\alpha, a+\alpha[$ et $a \in [a - \frac{\alpha}{2}, a + \frac{\alpha}{2}]$. D'où

$$[a - \frac{\alpha}{2}, a + \frac{\alpha}{2}] \cap A = \{a\}.$$

Autrement dit,

$$\boxed{[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap A = \{a\}}.$$

Réciproquement, supposons qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \cap A = \{a\}$. Or l'intervalle $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ est inclus dans $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ et $a \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$. Donc

$$\boxed{]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap A = \{a\}}.$$

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $\epsilon > 0$. L'intervalle $]x-\epsilon, x+\epsilon[$ contient le point $x + \frac{\epsilon}{2}$. Donc $\mathbb{R} \cap]x-\epsilon, x+\epsilon[\neq \{x\}$. L'ensemble $\mathbb{R}$ n'a donc pas de point isolé.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\epsilon = \frac{1}{2}$ et $I =]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[$. Le seul entier dans l'intervalle I est l'entier n. Donc $\boxed{I \cap \mathbb{N} = \{n\}}$.

5. Soit $N \in \mathbb{N}$. Montrons que $\frac{1}{2^N}$ est un point isolé de U. Posons $\varepsilon = \frac{1}{2^{N+1}}$. On a alors $\frac{1}{2^N} - \epsilon = \frac{1}{2^{N+1}}$ et $\frac{1}{2^N} + \epsilon = \frac{3}{2^{N+1}}$. Posons $I =]\frac{1}{2^{N+1}}, \frac{3}{2^{N+1}}[$. les éléments de I étant strictement positif, 0 n'est pas un élément de I. Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons que $\frac{1}{2^p}$ est un élémént de I. On a alors

$$\frac{1}{2^{N+1}} < \frac{1}{2^p} < \frac{3}{2^{N+1}}.$$

D'où

$$\frac{1}{2^{N+1}} < \frac{1}{2^p} < \frac{4}{2^{N+1}}.$$

Donc

$$\frac{1}{2^{N+1}} < \frac{1}{2^p} < \frac{1}{2^{N-1}}.$$

Par conséquent, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+\star}$:

$$2^{N+1} > 2^p > 2^{N-1}.$$

Par stricte croissance d'une fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$N + 1 > p > N - 1.$$

Or le seul entier strictement compris entre $N-1$ et $N+1$ est N. Donc, nécessairement $p = N$. Réciproquement, $\frac{1}{2^N}$ est bien un élément de U.

De l'étude précédente, on en déduit que tout élément de $\{\frac{1}{2^n}, n \in \mathbb{N}\}$ est un point isolé de U.

Montrons que 0 est bien un point d'accumulation de U. Soit $\epsilon > 0$. $\frac{1}{\epsilon}$ est donc strictement positif. D'après la propriété P, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que $2^N > \frac{1}{\epsilon}$. Par stricte croissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+\star}$, $\frac{1}{2^N} < \epsilon$. Or $\frac{1}{2^N} > 0$. Donc $\frac{1}{2^N}$ est un élément de $]-\epsilon, \epsilon[$. Mais c'est également un élément de U. Donc $]-\epsilon, \epsilon[\cap U \neq \{0\}$

0 est bien un point d'accumulation de U .

Conclusion : des études précédentes, on a montré que tout point de U autre que 0 est un point d'accumulation de U et que 0 est un point d'accumulation de U. Donc 0 est le seul et unique point d'accumulation de U.

Exercice 6. Résoudre l'équation d'inconnu réel x en fonction du paramètre réel m suivante :

$$|mx - 1| + |2 - m| = 2.$$

Correction

Soient $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}$. Remarquons que : $|2 - m| \leq 2 \iff (-2 \leq m - 2 \leq 2) \iff (0 \leq m \leq 4)$ On effectue dans la suite une disjonction de cas sur les valeurs possibles de m.

- Cas 1 : $|2 - m| > 2$ (Autrement dit, $m < 0$ ou $m > 4$)
  On a alors $|mx - 1| \geq 0$ et $|2 - m| > 2$. Donc $|mx - 1| + |2 - m| > 2$. L'égalité est donc fausse. Cette équation n'a donc pas de solution.
- Cas 2 : $|2 - m| \leq 2$ (Autrement dit, $0 \leq m \leq 4$) On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned}
|mx-1| + |2-m| = 2 &\iff |mx-1| = 2 - |2-m| && \\
&\iff |mx-1|^2 = (2-|2-m|)^2 && \text{et } 2 - |2-m| \geq 0 \\
&\iff (mx-1)^2 - (2-|2-m|)^2 = 0 && \text{et } 2 - |2-m| \geq 0 \\
&\iff (mx-1-(2-|2-m|))\,(mx-1+(2-|2-m|)) = 0 && \text{et } 2 - |2-m| \geq 0 \\
&\iff (mx-3+|2-m|)\,(mx+1-|2-m|) = 0 && \text{et } 2 - |2-m| \geq 0 \\
&\iff (mx = 3-|2-m| \text{ ou } mx = |2-m|-1) && \text{et } 2 - |2-m| \geq 0
\end{aligned}$$

  - Cas 2.1 : $m = 0$ On constate alors que l'on a $0 = 1$ ou $0 = 1$ ce qui est faux. Donc il n'y a pas de solution.
  - Cas 2.2 : $m \neq 0$. On peut remarquer que $2 - |2 - m| \geq 0$ est vérifié car on est dans le cas 2. Donc :

$$|mx - 1| + |2 - m| = 2 \iff \left(x = \frac{3 - |2 - m|}{m} \text{ ou } x = \frac{|2 - m| - 1}{m}\right).$$

Résumons les différentes possibilités dans un tableau :

m	$m < 0$	$m = 0$	$0 < m < 4$	$m = 4$	$m > 4$
S	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{\frac{3-\|2-m\|}{m}, \frac{\|2-m\|-1}{m}\}$	$\{\frac{1}{4}\}$	$\emptyset$

.