DS 2 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $2\cos(x)^2 + 3\cos(x) + 1 = 0$ 2. $\frac{\cos(x)+\frac{1}{2}}{\sin(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}} \geq 0$ 3. $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{3}$.

Exercice 2. On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnu réel x

$$\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \cos(kx)(-1)^k = 0 \tag{E}$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} \cos(kx)(-1)^k = 2^{100} \sin\left(\frac{x}{2}\right)^{100} \cos(50x)$.
2. Décrire l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 3. Pour tout entier n strictement positif, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2 - \frac{1}{2}k - \frac{3}{16}}, T_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} (i-j)^3, P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}, U_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} (j-i).$$

Désormais, on fixe $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$.

1. (a) Montrer que pour tout $k \in [|1,n|]$, $\dfrac{1}{k^2 - \frac{1}{2}k - \frac{3}{16}} = \dfrac{1}{k - \frac{3}{4}} - \dfrac{1}{k + \frac{1}{4}}$.

   (b) Simplifier S_n. On écrira le résultat sous forme d'une unique fraction.
2. Simplifier T_n, P_n, U_n.

Exercice 4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$(D : |z - i| = |z + 1|) \text{ et } (C : |z| = 1).$$

1. Décrire l'ensemble des nombres complexes z vérifiant D.
2. Determiner tous les nombres complexes z vérifiant D et C.
3. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, représenter géométriquement dans un repère orthonormé du plan les ensembles suivants :

   (a) $A = \{z \in \mathbb{C} | |z - i| = |z + 1|$ (b) $B = \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$.

ATTENTION, LE SUJET EST RECTO-VERSO !!!!

Problème

On fixe q un réel différent de 1 et de -1. Pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $k \leq n$, on définit le coefficient q-binomial k parmi n noté $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ par : $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=n-k+1}^{n} (q^j - 1)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{k} (q^j - 1)}$.

Par convention, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1$. Attention, les q-binomiaux ne sont pas les coefficients binomiaux usuels. Ainsi, les identités demandées dans la suite sont à démontrer en utilisant la définition des q-binomiaux (et non des coefficients binomiaux usuels).

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q = 1$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 < k < n$ on a : $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n} (q^j - 1)}{\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{k} (q^j - 1)\right)\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{n-k} (q^j - 1)\right)}$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$, on a : $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $0 < k \leq n$, on a : $(q^n - 1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q = (q^k - 1)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $0 < k < n$, on a : $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $0 < k < n$, on a : $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$.
7. Dans cette question uniquement, on suppose $q = 2$. Pour tout $n \in [|1,5|]$ et $0 \leq k \leq n$, calculer $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.
8. Dans cette question, on cherche à démontrer une variante de la formule du binôme :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \prod_{j=1}^{n} (y + q^{j-1}x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k y^{n-k}.$$
Pour cela, on procède par récurrence. On fixe x, y deux nombres complexes. Pour tout $n \geq 1$, on pose :
$$P(n) : \prod_{j=1}^{n} (y + q^{j-1}x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k y^{n-k}.$$
   (a) Montrer que $P(1)$ est vraie.
   (b) Soit $n > 1$. On suppose que $P(n-1)$ vraie.
      i. Montrer que :
$$\prod_{j=1}^{n} (y + q^{j-1}x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}+n-1} x^{k+1} y^{n-1-k}\right).$$
      ii. En déduire que
$$\prod_{j=1}^{n} (y + q^{j-1}x) = y^n + q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k y^{n-k}.$$
      iii. En déduire $P(n)$.
   (c) Conclure.
9. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Simplifier l'expression : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\prod_{j=1}^{n}(\sum_{l=0}^{j-1} 3^l)}{\left(\prod_{j=1}^{k}(\sum_{l=0}^{j-1} 3^l)\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k}(\sum_{l=0}^{j-1} 3^l)\right)}\right) 3^{\frac{k(k-1)}{2}} (-1)^{n-k}$.