DS 2 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

1. $2\cos(x)^2 + 3\cos(x) + 1 = 0$ 2. $\frac{\cos(x)+\frac{1}{2}}{\sin(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}} \geq 0$ 3. $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{3}$.

Correction

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = \cos(x)$. On a

$$2\cos(x)^2 + 3\cos(x) + 1 = 0 \iff 2X^2 + 3X + 1 = 0$$

On reconnaît une équation polynomiale du second degré dont le polynôme correspondant admet -1 comme racine et $-\frac{1}{2}$. Donc l'équation est équivalente à

$$X = -1 \text{ ou } X = -\frac{1}{2}.$$

L'équation est donc équivalente à

$$\cos(x) = -1 \text{ ou } \cos(x) = -\frac{1}{2}.$$

Donc

$$\boxed{S = \{\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{-2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$$

2. Déterminons le domaine de définition de cette équation. Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff x \in \{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ Désormais, on suppose que $x \in \mathbb{R}\backslash\{-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Déterminons les signes respectifs du numérateur et du dénominateur. Pour le numérateur :

$$\cos(x) + \tfrac{1}{2} \geq 0 \iff \cos(x) \geq -\tfrac{1}{2}$$

Sur $[-\pi, \pi]$ ceci est équivalent à

$$x \in [-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}]$$

Par 2π périodicité de la fonction cosinus, on en déduit que

$$\cos(x) + \frac{1}{2} \geq 0 \iff x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi]$$

Raisonnons de façon similiaire pour le dénominateur :

$$\sin(x) + \tfrac{\sqrt{2}}{2} > 0 \iff \sin(x) > -\tfrac{\sqrt{2}}{2}$$

Sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ ceci est équivalent à

$$x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}[$$

Par 2π périodicité de la fonction sinus, on en déduit que

$$\sin(x)+\frac{\sqrt{2}}{2}>0 \iff x\in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{5\pi}{4}+2k\pi[$$

Sur $[-\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$, on constate que le quotient est positif si et seulement si :

$$x\in]-\tfrac{\pi}{4},\tfrac{5\pi}{4}[\cap[-\tfrac{2\pi}{3},\tfrac{2\pi}{3}] \qquad \text{(numérateur et dénominateur positifs)}$$

$$\text{ou}\quad x\in]-\tfrac{3\pi}{4},-\tfrac{\pi}{4}[\cap([-\tfrac{3\pi}{4},-\tfrac{2\pi}{3}]\cup[\tfrac{2\pi}{3},\tfrac{5\pi}{4}] \qquad \text{(numérateur et dénominateur positifs)}$$

Sur $[-\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$, on constate que le quotient est positif si et seulement si :

$$x\in]-\tfrac{\pi}{4},\tfrac{2\pi}{3}] \qquad \text{(numérateur et dénominateur positifs)}$$

$$\text{ou}\quad x\in]-\tfrac{3\pi}{4},-\tfrac{2\pi}{3}] \qquad \text{(numérateur et dénominateur négatifs)}$$

En étendant par 2π périodicité, on en déduit que

$$\boxed{S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi]\cup]-\frac{3\pi}{4}+2k\pi,-\frac{2\pi}{3}+2k\pi].}$$

3. Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\cos(x)+\sin(x)=\sqrt{3} &\iff \sqrt{2}(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos(x)+\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(x))=\sqrt{3}\\ &\iff \sqrt{2}\cos(x-\tfrac{\pi}{4})=\sqrt{3}\\ &\iff \cos(x-\tfrac{\pi}{4})=\sqrt{\tfrac{3}{2}}\end{aligned}$$

Or $\sqrt{\frac{3}{2}}>1$ et $\cos(x-\frac{\pi}{4})\in[-1,1]$. Donc la dernière égalité est fausse.

Exercice 2. On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnu réel x

$$\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cos(kx)(-1)^k=0 \tag{E}$$

1. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cos(kx)(-1)^k=2^{100}\sin\left(\frac{x}{2}\right)^{100}\cos(50x)$.
2. Décrire l'ensemble des solutions de (E).

Correction

1. Soit $x\in\mathbb{R}$. On a

$$\textstyle\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cos(kx)(-1)^k \quad = \quad \sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\Re(e^{ikx})(-1)^k$$

Par linéarité de la partie réelle :

$$\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cos(kx)(-1)^k=\Re\left(\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}e^{ikx}(-1)^k\right)$$

En appliquant la formule du binôme, on obtient

$$\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cos(kx)(-1)^k=\Re\left((1-e^{ix})^{100}\right)$$

En factorisant par $e^{\frac{ix}{2}}$:

$$\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cos(kx)(-1)^k = \Re\left(e^{\frac{100ix}{2}}\left(e^{\frac{-ix}{2}}-e^{\frac{ix}{2}}\right)^{100}\right)$$

à l'aide de la formule d'Euler, on a donc

$$\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cos(kx)(-1)^k = \Re\left(e^{\frac{100ix}{2}}\left(2i\sin\left(-\frac{x}{2}\right)\right)^{100}\right)$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cos(kx)(-1)^k = \Re\left(e^{\frac{100ix}{2}}2^{100}\left(\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)^{100}\right)$$

Or $2^{100}\sin(\frac{x}{2})^{100}\in\mathbb{R}$. D'où

$$\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cos(kx)(-1)^k = 2^{100}\sin(\frac{x}{2})^{100}\Re(e^{50ix}).$$

D'où

$$\boxed{\sum_{k=0}^{100}\binom{100}{k}\cos(kx)(-1)^k = 2^{100}\sin(\frac{x}{2})^{100}\cos(50x)\,.}$$

2. D'après la question 1, on a :

$$(E) \iff 2^{100}\sin(\frac{x}{2})^{100}\cos(50x)=0$$

Il en résulte que :

$$(E) \iff \sin(\frac{x}{2})^{100}=0 \text{ ou } \cos(50x)=0.$$

Donc

$$(E) \iff (\exists k\in\mathbb{Z}, \frac{x}{2}=k\pi) \text{ ou } (\exists l\in\mathbb{Z}, 50x=\frac{\pi}{2}+k\pi).$$

Donc :

$$(E) \iff (\exists k\in\mathbb{Z}, x=2k\pi) \text{ ou } (\exists l\in\mathbb{Z}, x=\frac{\pi}{100}+l\frac{\pi}{50}).$$

D'où

$$\boxed{S=\{2k\pi; \frac{\pi}{100}+\frac{k\pi}{50}, k \text{ décrit } \mathbb{Z}\}.}$$

Exercice 3. Pour tout entier n strictement positif, on pose

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2-\frac{1}{2}k-\frac{3}{16}}, T_n=\sum_{1\le i,j\le n}(i-j)^3, P_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}, U_n=\sum_{1\le i\le j\le n}(j-i).$$

Désormais, on fixe $n\in\mathbb{N}\backslash\{0\}$.

1. (a) Montrer que pour tout $k\in[|1,n|]$, $\dfrac{1}{k^2-\frac{1}{2}k-\frac{3}{16}}=\dfrac{1}{k-\frac{3}{4}}-\dfrac{1}{k+\frac{1}{4}}$.
   (b) Simplifier S_n. On écrira le résultat sous forme d'une unique fraction.
2. Simplifier T_n, P_n, U_n.

Correction

1. (a) Soit $k\in[|1,n|]$. On a

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{k-\frac{3}{4}}-\tfrac{1}{k+\frac{1}{4}} &= \tfrac{k+\frac{1}{4}-(k-\frac{3}{4})}{(k-\frac{3}{4})(k+\frac{1}{4})}\\
&= \tfrac{1}{k^2+(-\frac{3}{4}+\frac{1}{4})k-\frac{3}{16}}\\
&= \boxed{\frac{1}{k^2-\frac{1}{2}k-\frac{3}{16}}}.
\end{aligned}$$

(b) On a :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2-\frac{1}{2}k-\frac{3}{16}}.$$

Il en résulte, d'après la question 1.a,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k-\frac{3}{4}} - \frac{1}{(k+\frac{1}{4}}\right)$$

Autrement dit,

$$S_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{(k-1)+\frac{1}{4}} - \frac{1}{(k+\frac{1}{4})}\right)$$

On reconnaît alors une somme télescopique. D'où

$$S_n = 4 - \frac{1}{(n+\frac{1}{4})}$$

En réduisant au même dénominateur :

$$S_n = \frac{16n+4-4}{4n+1}$$

D'où

$$\boxed{S_n = \frac{16n}{4n+1}}.$$

2. On a :

$$T_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} (i-j)^3.$$

La fonction cube étant impaire, on en déduit que

$$T_n = \sum_{1\leq i,j\leq n} -(j-i)^3.$$

Autrement dit,

$$T_n = -\sum_{1\leq i,j\leq n} (j-i)^3.$$

D'où

$$T_n = -\sum_{1\leq j,i\leq n} (j-i)^3.$$

En inversant les noms entre i et j, on a alors

$$T_n = -\sum_{1\leq i,j\leq n} (i-j)^3.$$

Autrement dit,

$$T_n = -T_n.$$

Donc $2T_n = 0$. D'où

$$\boxed{T_n = 0}.$$

On a :

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k} \\ &= \frac{\left(\prod_{k=1}^n (k+1)\right)}{\left(\prod_{k=1}^n k\right)} \\ &= \frac{\left(\prod_{k=0}^n (k+1)\right)}{\left(\prod_{k=1}^n k\right)} \\ &= \frac{(n+1)!}{n!} \\ &= n+1 \end{aligned}.$$

Donc $\boxed{P_n = n+1}$.
Calcul de U_n :

$$
\begin{aligned}
U_n &= \sum_{1\leq i\leq j\leq n}(j-i)\\
&= \sum_{1\leq i\leq j\leq n} j - \sum_{1\leq i\leq j\leq n} i\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} j - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i\\
&= \sum_{j=1}^{n} j\sum_{i=1}^{j} 1 - \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}\\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}\\
&= \sum_{j=1}^{n} j^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j\\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j^2 - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4}\\
&= \frac{n(n+1)}{12}(2n+1-3)\\
&= \frac{n(n+1)}{12}(2n-2)\\
&= \frac{n(n+1)(n-1)}{6}
\end{aligned}
$$

Donc : $\boxed{U_n = \dfrac{n(n+1)(n-1)}{6}}$.

Exercice 4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$(D : |z-i| = |z+1|) \text{ et } (C : |z| = 1).$$

1. Décrire l'ensemble des nombres complexes z vérifiant D.
2. Determiner tous les nombres complexes z vérifiant D et C.
3. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, représenter géométriquement dans un repère orthonormé du plan les ensembles suivants :

   (a) $A = \{z \in \mathbb{C} || z-i| = |z+1|$ (b) $B = \{z \in \mathbb{C} ||z| = 1\}$.

Correction

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose :

$$(D : |z-i| = |z+1|) \text{ et } (C : |z| = 1).$$

1. Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$ avec a, b réels. Raisonnons par équivalence :

$$
\begin{aligned}
z \in D &\iff |z-i| = |z+1|\\
&\iff |z-i|^2 = |z+1|^2 \qquad \text{car les modules sont positifs}\\
&\iff (z-i)(\overline{z}+i) = (z+1)(\overline{z}+1)\\
&\iff z\overline{z} + iz - i\overline{z} + 1 = z\overline{z} + z + \overline{z} + 1\\
&\iff i(z-\overline{z}) = z + \overline{z}\\
&\iff -2b = 2a\\
&\iff b = -a
\end{aligned}
$$

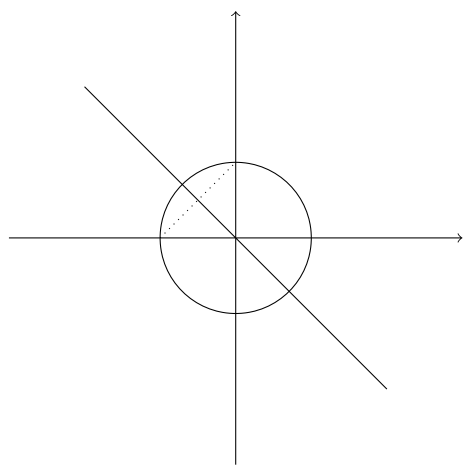
De cette étude, on en déduit que

$$\boxed{D = \{a - ia, a \text{ décrit } \mathbb{R}\}}.$$

2. Soit $z \in D \cap C$. Cela revient à trouver $a \in \mathbb{R}$ vérifiant : $z = a - ia$ et $|z| = 1$. Raisonnons par équivalence :

$$\begin{aligned}
z = a - ia \text{ et } |z| = 1 &\iff z = a - ia \text{ et } |z|^2 = 1\\
&\iff z = a - ia \text{ et } a^2 + a^2 = 1\\
&\iff z = a - ia \text{ et } 2a^2 = 1\\
&\iff z = a - ia \text{ et } (a = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \text{ ou } a = -\tfrac{1}{\sqrt{2}})\\
&\iff z = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i) \text{ ou } z = \tfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)
\end{aligned}$$

3. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, A est représenté par la médiatrice du segment $[M, N]$ où $M = (0,1), N = (-1,0)$ et B est représenté par le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1.



Problème

On fixe q un réel différent de 1 et de -1. Pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $k \leq n$, on définit le coefficient q-binomial k parmi n noté $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ par : $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=n-k+1}^{n} (q^j - 1)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{k} (q^j - 1)}$.

Par convention, $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_q = 1$. Attention, les q-binomiaux ne sont pas les coefficients binomiaux usuels. Ainsi, les identités demandées dans la suite sont à démontrer en utilisant la définition des q-binomiaux (et non des coefficients binomiaux usuels).

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q = 1$.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 < k < n$ on a : $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n} (q^j - 1)}{\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{k} (q^j - 1)\right)\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{n-k} (q^j - 1)\right)}$.

3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$, on a : $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q$.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $0 < k \leq n$, on a : $(q^n - 1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q = (q^k - 1)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $0 < k < n$, on a : $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q$.

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $0 < k < n$, on a : $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q = q^{n-k} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right]_q + \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right]_q$.

7. Dans cette question uniquement, on suppose $\underline{q=2}$. Pour tout $n \in [|1,5|]$ et $0 \leq k \leq n$, calculer $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q$.

8. Dans cette question, on cherche à démontrer une variante de la formule du binôme :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \prod_{j=1}^{n} (y + q^{j-1}x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k y^{n-k}.$$

Pour cela, on procède par récurrence. On fixe x, y deux nombres complexes. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$P(n) : \prod_{j=1}^{n} (y + q^{j-1}x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k y^{n-k}.$$

(a) Montrer que $P(1)$ est vraie.

(b) Soit $n > 1$. On suppose que $P(n-1)$ vraie.

i. Montrer que :

$$\prod_{j=1}^{n} (y + q^{j-1}x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right]_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k y^{n-k} \right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right]_q q^{\frac{k(k-1)}{2}+n-1} x^{k+1} y^{n-1-k} \right).$$

ii. En déduire que

$$\prod_{j=1}^{n} (y + q^{j-1}x) = y^n + q^{\frac{n(n-1)}{2}} x^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right]_q + q^{n-k} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right]_q \right) q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k y^{n-k}.$$

iii. En déduire $P(n)$.

(c) Conclure.

9. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Simplifier l'expression : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\prod_{j=1}^{n} (\sum_{l=0}^{j-1} 3^l)}{\left(\prod_{j=1}^{k} (\sum_{l=0}^{j-1} 3^l)\right) \left(\prod_{j=1}^{n-k} (\sum_{l=0}^{j-1} 3^l)\right)} \right) 3^{\frac{k(k-1)}{2}} (-1)^{n-k}$.

Correction

On fixe q un réel différent de 1 et de -1. Pour tout couple $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $k \leq n$, on définit le coefficient q-binomial k parmi n noté $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q$ par : $\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q = \dfrac{\displaystyle\prod_{j=n-k+1}^{n} (q^j - 1)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{k} (q^j - 1)}$.

Par convention, $\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right]_q = 1$. Attention, les q-binomiaux ne sont pas les coefficients binomiaux usuels. Ainsi, les identités demandées dans la suite sont à démontrer en utilisant la définition des q-binomiaux (et non des coefficients binomiaux usuels).

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.

— Cas 1 : $n = 0$ D'après la convention, $\left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array}\right]_q = 1$.

— Cas 2 : $n > 0$. Par définition, $\left[\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right]_q = \frac{\prod_{j=n+1}^{n} (q^j - 1)}{\prod_{j=1}^{n} (q^j - 1)}$. or, par convention, les produits indexés par l'ensemble vide sont égaux à 1. D'où

$$\boxed{\left[\begin{array}{c} n \\ 0 \end{array}\right]_q = 1}.$$

Par définition,

$$\left[\begin{array}{c} n \\ n \end{array}\right]_q = \frac{\prod_{j=1}^{n} (q^j - 1)}{\prod_{j=1}^{n} (q^j - 1)}.$$

Les produits étant identiques au numérateur et au dénominateur, on en déduit que

$$\boxed{\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_q = 1}$$

2. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $0 < k < n$.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{\prod_{j=n-k+1}^{n}(q^j-1)}{\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)} \\
&= \frac{\left(\prod_{j=n-k+1}^{n}(q^j-1)\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)\right)}{\left(\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)\right)} \\
&= \frac{\prod_{j=1}^{n}(q^j-1)}{\left(\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)\right)}
\end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(q^j-1)}{\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)\right)\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)\right)}}..$$

3. Soient $n \in \mathbb{N}$, $0 < k < n$. On a :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q &= \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(q^j-1)}{\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)\right)\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)\right)} && \text{d'après la question 2} \\
&= \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(q^j-1)}{\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)\right)\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)\right)} \\
&= \frac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(q^j-1)}{\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)\right)\left(\displaystyle\prod_{j=1}^{n-(n-k)}(q^j-1)\right)} \\
&= \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q && \text{d'après la question 2 (en remplaçant k par n-k)}
\end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ n-k \end{bmatrix}_q}.$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $0 < k \leq n$. On a :

$$\begin{aligned}
(q^n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q &= (q^n-1)\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(q^j-1)}{\left(\prod_{j=1}^{k-1}(q^j-1)\right)\left(\prod_{j=1}^{n-1-(k-1)}(q^j-1)\right)} && \text{d'après la question 2}\\
&= \frac{\prod_{j=1}^{n}(q^j-1)}{\left(\prod_{j=1}^{k-1}(q^j-1)\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)\right)}\\
&= \frac{(q^k-1)}{(q^k-1)}\frac{\prod_{j=1}^{n}(q^j-1)}{\left(\prod_{j=1}^{k-1}(q^j-1)\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)\right)}\\
&= \frac{(q^k-1)}{(q^k-1)}\frac{\prod_{j=1}^{n}(q^j-1)}{\left(\prod_{j=1}^{k-1}(q^j-1)\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)\right)}\\
&= (q^k-1)\frac{\prod_{j=1}^{n}(q^j-1)}{\left(\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)\right)}\\
&= (q^k-1)\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q && \text{d'après la question 2}
\end{aligned}$$

On a bien l'identité

$$\boxed{(q^n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q = (q^k-1)\binom{n}{k}}.$$

5. Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $0 < k < n$, on a :

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{\prod_{j=1}^{n-1}(q^j-1)}{\prod_{j=1}^{k-1}(q^j-1)\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)} + q^k\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(q^j-1)}{\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)\prod_{j=1}^{n-1-k}(q^j-1)}$$

En factorisant, on obtient :

$$\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q + q^k\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q = \left(\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(q^j-1)}{\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)}\right)\left(q^k-1+q^k(q^{n-k}-1)\right)$$

En simplifiant, on a alors

$$\begin{aligned}
\left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right]_q + q^k \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right]_q &= \left(\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(q^j-1)}{\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)}\right)(q^n-1) \\
&= \left(\frac{\prod_{j=1}^{n}(q^j-1)}{\prod_{j=1}^{k}(q^j-1)\prod_{j=1}^{n-k}(q^j-1)}\right) \\
&= \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q \qquad \text{d'après la question 2}
\end{aligned}$$

On a bien

$$\boxed{\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right]_q + q^k \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right]_q}.$$

6. Soient $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $0 < k < n$. D'après la question 3,

$$\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q = \left[\begin{array}{c} n \\ n-k \end{array}\right]_q$$

En remplaçant k par $n-k$ et à l'aide de la question 5, on obtient :

$$\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ (n-k)-1 \end{array}\right]_q + q^{n-k} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ n-k \end{array}\right]_q$$

En utilisant de nouveau la symétrie des q-binomiaux :

$$\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ n-1-((n-k)-1) \end{array}\right]_q + q^{n-k} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ (n-1)-(n-k) \end{array}\right]_q$$

Autement dit,

$$\boxed{\left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q = \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k \end{array}\right]_q + q^{n-k} \left[\begin{array}{c} n-1 \\ k-1 \end{array}\right]_q}.$$

7. Pour ces calculs, on utilisera la relation de la question 5, et on effectue les calculs de la même façon que pour le triangle de Pascal :

n, k	0	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	3	1			
3	1	7	7	1		
4	1	15	35	15	1	
5	1	31	155	155	31	1

8. Dans cette question, on cherche à démontrer une variante de la formule du binôme :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \prod_{j=1}^{n}(y+q^{j-1}x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k y^{n-k}.$$

Pour cela, on procède par récurrence. On fixe x, y deux nombres complexes. Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$P(n) : \prod_{j=1}^{n}(y+q^{j-1}x) = \sum_{k=0}^{n} \left[\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right]_q q^{\frac{k(k-1)}{2}} x^k y^{n-k}.$$

(a) Montrons que $P(1)$ est vraie. On a $y + q^0 x = y + x$ et $\left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array}\right]_q q^0 x^0 y^1 + \left[\begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\right]_q q^0 x^1 = x + y$. Donc $P(1)$ est vraie.

(b) Soit $n > 1$. On suppose que $P(n-1)$ vraie.

i. Par définition,

$$\prod_{j=1}^{n}(y+q^{j-1}x) = \left(y+q^{n-1}x\right)\prod_{j=1}^{n-1}(y+q^{j-1}x)$$

D'après $P(n-1)$:

$$\prod_{j=1}^{n-1}(y+q^{j-1}x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-1-k}\right).$$

En multipliant par $(y+q^{n-1}x)$ et par linéarité, il en résulte que :

$$\boxed{\prod_{j=1}^{n}(y+q^{j-1}x) = \left(\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}+n-1}x^{k+1} y^{n-1-k}\right)}.$$

ii. Dans le membre de droite de l'égalité précédente, en isolant dans la première somme le premier terme et dans la deuxième somme le dernier terme, on obtient :

$$\prod_{j=1}^{n}(y+q^{j-1}x) = y^n + q^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-k}\right) + \left(\sum_{k=0}^{n-2}\begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}+n-1}x^{k+1} y^{n-1-k}\right)$$

Effectuons le changement de variable $l=k+1$ dans la deuxième somme. On a alors :

$$\prod_{j=1}^{n}(y+q^{j-1}x) = y^n + q^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-k}\right) + \left(\sum_{l=1}^{n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ l-1\end{bmatrix}_q q^{\frac{(l-1)(l-2)}{2}+n-1}x^{l} y^{n-l}\right)$$

Or $\frac{l(l-1)}{2} = \frac{(l-1)(l-2)}{2} + (l-1)$. D'où

$$\prod_{j=1}^{n}(y+q^{j-1}x) = y^n + q^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-k}\right) + \left(\sum_{l=1}^{n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ l-1\end{bmatrix}_q q^{\frac{l(l-1)}{2}+n-l}x^{l} y^{n-l}\right)$$

Donc

$$\prod_{j=1}^{n}(y+q^{j-1}x) = y^n + q^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-k}\right) + \left(\sum_{l=1}^{n-1}q^{n-l}\begin{bmatrix} n-1 \\ l-1\end{bmatrix}_q q^{\frac{l(l-1)}{2}}x^{l} y^{n-l}\right).$$

En regroupant les deux sommes, on obtient alors :

$$\boxed{\prod_{j=1}^{n}(y+q^{j-1}x) = y^n + q^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k\end{bmatrix}_q + q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1\end{bmatrix}_q\right) q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-k}}.$$

iii. Dans la somme du membre de droite, en appliquant la formule de question 6, on obtient :

$$\prod_{j=1}^{n}(y+q^{j-1}x) = y^n + q^{\frac{n(n-1)}{2}}x^n + \sum_{k=1}^{n-1}\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-k}.$$

En regroupant tous les termes dans une même somme, il en résulte que :

$$\boxed{\prod_{j=1}^{n}(y+q^{j-1}x) = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-k}}.$$

$P(n)$ est donc vraie.

(c) Conclusion : la propriété P est initialisée et héréditaire. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. Ceci a été prouvé pour in couple $(x,y) \in \mathbb{C}^2$ arbitraire. On a bien :

$$\boxed{\forall (x,y)\in\mathbb{C}^2, \forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}, \prod_{j=1}^{n}(y+q^{j-1}x) = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} n \\ k\end{bmatrix}_q q^{\frac{k(k-1)}{2}}x^k y^{n-k}}.$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On a :

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\prod_{j=1}^{n} (\sum_{l=0}^{j-1} 3^l)}{\left(\prod_{j=1}^{k} (\sum_{l=0}^{j-1} 3^l)\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k} (\sum_{l=0}^{j-1} 3^l)\right)} \right) 3^{\frac{k(k-1)}{2}} (-1)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\prod_{j=1}^{n} (\frac{3^j-1}{2})}{\left(\prod_{j=1}^{k} (\frac{3^j-1}{2})\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k} (\frac{3^j-1}{2})\right)} \right) 3^{\frac{k(k-1)}{2}} (-1)^{n-k} && \text{somme de termes de suite géométrique} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\prod_{j=1}^{n} (3^j-1)}{\left(\prod_{j=1}^{k} (3^j-1)\right)\left(\prod_{j=1}^{n-k} (3^j-1)\right)} \right) 3^{\frac{k(k-1)}{2}} (-1)^{n-k} && \text{le nombre de 2 étant égal au numérateur et au dénominateur} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q 3^{\frac{k(k-1)}{2}} (-1)^{n-k} && \text{avec } q = 3 \\
&= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q 3^{\frac{k(k-1)}{2}} (1)^k (-1)^{n-k} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \left(-1 + 3^{j-1}\right) && \text{D'après la formule de la question 8} \\
&= \boxed{0} && \text{pour } j = 1 \text{, on a } 0
\end{aligned}$$