DS n° 3 de mathématiques et d'informatique

durée : 4 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Problème 1

Dans ce problème, on considère des suites de nombres réels indexées par les entiers naturels. Une telle suite sera notée $u = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots) = (u_n)_{n\geqslant 0}$. On rappelle que la somme de deux suites a et b est la suite notée $a + b$ définie par $(a + b)_n = a_n + b_n$ pour tout $n \geqslant 0$. De même, on définit une nouvelle opération entre deux suites a et b, appelée le produit de convolution et notée $a \star b$, par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad (a \star b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ainsi, si $a = (0, 2, 4, 6, 8, \dots)$ et $b = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ alors :

$$\begin{aligned}(a \star b)_4 &= a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0 \\ &= 0 \times 9 + 2 \times 7 + 4 \times 5 + 6 \times 3 + 8 \times 1 = 60.\end{aligned}$$

La partie I propose de calculer des exemples de produits de convolution. La partie II propose de résoudre une équation de suites faisant intervenir le produit de convolution.

On utilisera le langage Python pour écrire les fonctions demandées dans les questions d'informatique. Dans tout le sujet, l'expression «0 à n» signifiera tous les entiers «0, 1, 2, 3, …, $n-1$ et n» (0 et n inclus).

I) Quelques exemples

Dans cette partie, on considère les suites suivantes :
— la suite des entiers notée $i = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$;
— pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $g(\alpha) = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \dots)$;
— pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $e(\alpha)$ definie par $e(\alpha)_n = \alpha^n/n!$ pour tout $n \geqslant 0$.

On utilisera la convention que $0^0 = 1$, ainsi $e(0) = (1, 0, 0, 0, 0, \dots) = g(0)$.

1. [**Informatique**]
   (a) Écrire une fonction `suiteI` qui prend en argument un entier naturel n puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à n de la suite i. Ainsi, `suiteI(4)` renvoie la liste `[0,1,2,3,4]`.
   (b) On considère la fonction `mystere` écrite ci-contre.

```
def mystere(alpha,n):
    L=[1]
    for i in range(n):
        print(L[i])
        L=L+[L[i]*alpha]
    return L
```

      i. Détailler ce qu'affiche `mystere(2,4)`, c'est-à-dire le résultat de chaque exécution de l'instruction `print` et le résultat de l'instruction `return`.
      ii. De manière générale, à quoi sert la fonction `mystere` (sans prendre en compte la ligne comportant l'inscrution `print`) ?
   (c) i. Écrire une fonction `fact` qui permet de calculer la factorielle d'un entier naturel.
      ii. En utilisant la fonction `fact`, écrire une fonction `suiteE` qui prend en arguments un réel α et un entier naturel n puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à n de la suite $e(\alpha)$.
   (d) Dans cette question, on suppose avoir déjà écrit deux fonctions `suiteA` et `suiteB` qui prennent en argument un entier naturel n puis qui renvoient la liste des termes d'indice 0 à n de deux suites a et b respectivement.
      i. Écrire une fonction `termeAstarB` qui prend en argument un entier naturel n puis qui renvoie la valeur de $(a \star b)_n$.
      ii. Écrire une fonction `suiteAstarB` qui prend en argument un entier naturel n puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à n de la suite $a \star b$.

2. Montrer que $(i \star i)_n = (n-1)n(n+1)/6$ pour tout $n \geqslant 0$.
3. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad (g(\alpha) \star g(\beta))_n = \begin{cases} (n+1)\alpha^n & \text{si } \alpha = \beta \\ \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

4. Dans cette question, on propose de retrouver le résultat de la question précédente (qu'on ne pourra donc pas utiliser) à l'aide d'une méthode différente. On fixe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et on pose $u = g(\alpha) \star g(\beta)$.
   (a) Calculer u_0 et u_1.
   (b) Soit $n \geqslant 0$. Montrer que $(\alpha + \beta)u_{n+1} - u_{n+2} = \alpha\beta u_n$. Quel type de suite reconnaît-on ?
   (c) Conclure en distinguant les cas $\alpha = \beta$ et $\alpha \neq \beta$.
5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on propose de calculer $i \star g(\alpha)$.
   (a) Soit $n \geqslant 0$. Simplifier $(i \star g(\alpha))_n$ dans le cas où $\alpha = 1$.
   (b) Dans cette question, on suppose que $\alpha \neq 1$ et on pose $u = ((i \star g(\alpha))_{n+1} - (i \star g(\alpha))_n)_{n \geqslant 0}$.
      i. Soit $n \geqslant 0$. Montrer que u_n est égal à la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $g(\alpha)$ et en déduire une expression de u_n qui n'utilise pas le symbole Σ.
      ii. Soit $n \geqslant 1$. En calculant la somme $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ de deux façons différentes, déterminer une expression de $(i \star g(\alpha))_n$ qui n'utilise pas le symbole Σ.
   (c) Vérifier que l'expression obtenue à la question précédente reste vraie si $n = 0$ puis conclure.
6. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. À l'aide d'une formule du cours à préciser, montrer que $e(\alpha) \star e(\beta) = e(\alpha + \beta)$, c'est-à-dire que $(e(\alpha) \star e(\beta))_n = e(\alpha + \beta)_n$ pour tout $n \geqslant 0$.

II) Résolution d'une équation de suites

Dans cette partie, on propose de résoudre des équations de la forme $a \star u = b$ où a et b sont deux suites fixées avec $a_0 \neq 0$ et u est une suite inconnue.

7. Dans cette question, on suppose que $a = (\alpha, \beta, 0, 0, 0, \dots)$ et $b = (\gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \dots)$ où α, β et γ sont trois constantes réelles fixées avec $\alpha \neq 0$. On considère une suite u solution de l'équation $a \star u = b$.
   (a) Déterminer u_0.
   (b) Soit $n \geqslant 0$. À l'aide de l'égalité $(a \star u)_{n+1} = b_{n+1}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quel type de suite reconnaît-on ?
   (c) Déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \geqslant 0$.
8. Dans cette question, on revient au cas général où a et b sont deux suites fixées avec $a_0 \neq 0$. Montrer que $a \star u = b$ si et seulement si u est la suite définie par

$$u_0 = \frac{b_0}{a_0} \quad \text{et la relation de récurrence :} \quad \forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{b_n}{a_0} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{a_0} u_k.$$

9. [**Informatique**] On suppose avoir déjà écrit deux fonctions `suiteA` et `suiteB` qui prennent en argument un entier naturel n puis qui renvoient la liste des termes d'indice 0 à n des suites a et b respectivement. Le but de cette question est d'écrire une fonction `solution` qui prend en argument un entier naturel n puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à n de l'unique suite u solution de l'équation $a \star u = b$. Pour cela, on considère la fonction suivante :

```
def n1porteKoi(n):
    A=suiteA(n)
    B=suiteB(n)
    L=[1]
    for i in range(1,n+1):
        S=0
        for k in range(i):
            S=S+A[k]*L[k]
        L=L+[B[i]-S]
    return L
```

   (a) Que renvoie `n1porteKoi(1)` en fonction de a_0, a_1, b_0 et b_1 ?
   (b) Que doit renvoyer `solution(1)` en fonction de a_0, a_1, b_0 et b_1 ?
   (c) Corriger la fonction `n1porteKoi` pour obtenir une fonction `solution`.

DS 3 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

- Durée : 4 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

---

2 Étude des applications de $[|n|]$ dans lui-même.

2.1 Introduction et définitions

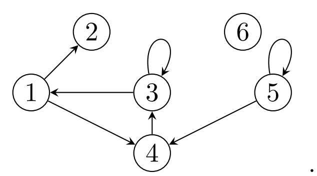
Dans tout le sujet, la notation $[|n|]$ désigne l'ensemble des entiers $\{1, 2, \dots, n\}$. Par convention, $[|0|] = \emptyset$. L'objectif du problème est de décrire des parties de $F_n = \{f : [|n|] \to [|n|]\}$ vérifiant des propriétés particulières. Pour cela, on introduit un nouvel objet combinatoire : les graphes.

Définition 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un **graphe** G **à** n **sommets** est un couple (n, A) où $\underline{A \text{ est une partie de } [|n|] \times [|n|]}$. Un élément $k \in [|n|]$ est appelé **sommet** de G et un couple $(i, j) \in A$ est appelée **arête** de G.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{G}_n$ l'ensemble des graphes à n sommets.

Il est commode de représenter un graphe G par un dessin construit comme suit : on place tous les sommets de G et si (i, j) est une arête de G on dessine une flèche allant de i vers j.

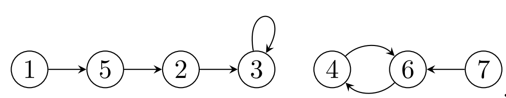
Par exemple, $G = (6, \{(1, 2), (1, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 4), (5, 5)\})$ est un élément de $\mathcal{G}_6$ que l'on représente ainsi :



Définition 2. Soient $n \geq 1$ et $f : [|n|] \to [|n|]$ une application. On définit **le graphe** de f, noté G_f par :

$$G_f = (n, \{(i, f(i)), i \text{ décrit } [|n|]\}).$$

Par exemple, si l'application $f : [|7|] \to [|7|]$ est définie par : $f(1) = 5, f(2) = 3, f(3) = 3, f(4) = 6, f(5) = 2, f(6) = 4, f(7) = 6$ le graphe G_f est représenté par

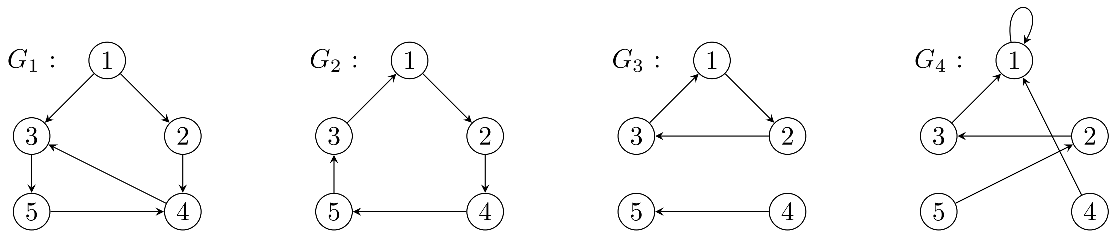


2.2 Dénombrement de familles de graphes

1. Dessiner tous les graphes de $\mathcal{G}_3$ ayant exactement 1 arête.
2. Quel est le nombre maximal d'arêtes pour un graphe G de $\mathcal{G}_3$?
3. Combien y-a-t-il de graphes de $\mathcal{G}_3$ ayant exactement 7 arêtes ?
4. Déterminer le cardinal de $\mathcal{G}_3$.
5. Soient $n \geq 1$ et $G \in \mathcal{G}_n$. Combien G a-t-il de sommets ? Quel est le nombre maximal d'arêtes pour G ?
6. Soit $n \geq 1$. Déterminer le cardinal de $\mathcal{G}_n$. Justifier votre réponse.
7. Soient $n \geq 1, k \in \mathbb{N}$. Combien y-a-t-il de graphes de $\mathcal{G}_n$ ayant exactement k arêtes ? Justifier votre réponse.
8. Soit $n \geq 1$. On dit qu'un graphe G de $\mathcal{G}_n$ est une chaîne s'il existe des entiers $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ de $[|n|]$ distincts deux à deux et tels que G est représenté par $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_{n-1} \to a_n$. Autrement dit, les arêtes de G sont exactement les couples de la forme (a_i, a_{i+1}) pour i décrivant $\{1, 2, \dots, n-1\}$.
   Combien y-a-t-il de chaînes de $\mathcal{G}_n$? Justifier votre réponse.

2.3 Applications et graphes

9. Pour chacun des graphes G_i suivants



Expliquer s'il existe une application $f_i \in F_5$ vérifiant $G_{f_i} = G_i$. Dans le cas où f_i est bien définie, expliciter celle-ci.

10. Soit $n \geq 1$. On pose $A_n = \{G_f, f \text{ décrit } F_n\}$.
    (a) Montrer que pour tout $(f, h) \in F_n^2$, si $G_f = G_h$ alors $f = h$.
    (b) En déduire le cardinal de A_n.
11. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \geq 1, n^n \leq 2^{(n^2)}$.

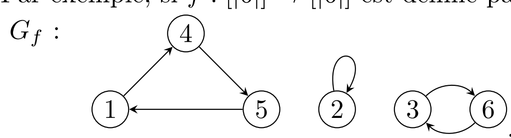
2.4 Étude d'une partie de F_n

Dans la suite, pour tout $n \geq 1$ on note $I_n : [|n|] \to [|n|]$ l'application identité sur $[|n|]$ et pour tout élément $f \in F_n$ et $p \in \mathbb{N}$, la notation f^p désigne l'application $\underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{\text{p fois}}$. Par convention, $f^0 = I_n$. Étant donnés $f \in F_n$ et $x \in [|n|]$, une manière pratique de trouver la valeur de $f^p(x)$ à l'aide de G_f est de se placer sur x dans G_f et d'avancer p fois suivant le chemin indiqué par les arêtes. La valeur atteinte est alors $f^p(x)$. On définit également B_n par

$$B_n = \{f \in F_n | \exists p \geq 1, f^p = I_n\}$$

et on note b_n son cardinal.

Par exemple, si $f : [|6|] \to [|6|]$ est définie par $f(1) = 4, f(2) = 2, f(3) = 6, f(4) = 5, f(5) = 1, f(6) = 3$,



, en partant de 1 et en avançant quatre fois, on arrive sur 4. On a donc $f^4(1) = 4$. Pour tout $i \in [|6|]$, on remarque que $f^6(i) = i$. Autrement dit $f^6 = I_6$. Par conséquent, f est un élément de B_6.

Désormais, on fixe $n \geq 1$.

12. Soit $f \in F_n$. Dans cette question, on démontre une condition suffisante pour que f ne soit pas un élément de B_n. On pourra utiliser cette propriété dans la suite du problème sans la redémontrer.
    (a) Montrer que pour tout $i \geq 1, f^i([|n|]) \subset f([|n|])$.
    (b) En déduire que si $f([|n|])$ est strictement inclus dans $[|n|]$ alors f n'est pas un élément de B_n.
13. Parmi les f_i existantes dans la question 9, la ou lesquelles sont des éléments de B_5 ? Justifier vos réponses.
14. Pour toute application f élément de B_3, dessiner le graphe G_f.
15. Pour chacune des applications f_i suivantes,
    (a) $f_1 : [|7|] \to [|7|], f_1(1) = 5, f_1(2) = 4, f_1(3) = 1, f_1(4) = 2, f_1(5) = 7, f_1(6) = 6, f_1(7) = 3$
    (b) $f_2 : [|7|] \to [|7|], f_2(1) = 3, f_2(2) = 5, f_2(3) = 4, f_2(4) = 7, f_2(5) = 7, f_2(6) = 3, f_2(7) = 4$
    (c) $f_3 : [|7|] \to [|7|], f_3(1) = 3, f_3(2) = 6, f_3(3) = 1, f_3(4) = 4, f_3(5) = 5, f_3(6) = 2, f_3(7) = 7$

    justifier s'il s'agit d'un élément de B_7. Dans le cas où f_i est un élément de B_7, expliciter une valeur $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $(f_i)^p = I_7$. Le détail des calculs n'est pas demandé.
16. Déterminer le nombre de $f \in B_7$ vérifiant $f^2 = I_7$. Expliquer votre réponse.
17. Soit f un élément de B_n. On note $p \geq 1$ un entier vérifiant $f^p = I_n$. Montrer que f est bijective et exprimer la réciproque de f en fonction de f et p.
18. Soit $f \in F_n$.
    (a) Montrer que la liste $[f, f^2, \ldots, f^{(n^n+1)}]$ contient au moins une répétition.
    Dans la suite, on fixe q, r des entiers vérifiant $1 \leq q < r \leq n^n + 1$ et $f^q = f^r$.
    (b) En déduire que si f est bijective alors il existe un entier $p \geq 1$ vérifiant $f^p = I_n$.
19. Déduire des questions précédentes une formule simple pour b_n.