Corrigé du DS n^o 3 de mathématiques et d'informatique

Problème 1

Dans ce problème, on considère des suites de nombres réels indexées par les entiers naturels. Une telle suite sera notée $u = (u_0, u_1, u_2, u_3, u_4, \dots) = (u_n)_{n\geqslant 0}$. On rappelle que la somme de deux suites a et b est la suite notée $a + b$ définie par $(a + b)_n = a_n + b_n$ pour tout $n \geqslant 0$. De même, on définit une nouvelle opération entre deux suites a et b, appelée le produit de convolution et notée $a \star b$, par :

$$\forall n \geqslant 0, \quad (a \star b)_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Ainsi, si $a = (0, 2, 4, 6, 8, \dots)$ et $b = (1, 3, 5, 7, 9, \dots)$ alors :

$$\begin{aligned}(a \star b)_4 &= a_0b_4 + a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1 + a_4b_0\\ &= 0 \times 9 + 2 \times 7 + 4 \times 5 + 6 \times 3 + 8 \times 1 = 60.\end{aligned}$$

La partie I propose de calculer des exemples de produits de convolution. La partie II propose de résoudre une équation de suites faisant intervenir le produit de convolution.

On utilisera le langage Python pour écrire les fonctions demandées dans les questions d'informatique. Dans tout le sujet, l'expression «0 à n» signifiera tous les entiers «0, 1, 2, 3, ..., $n-1$ et n» (0 et n inclus).

I) Quelques exemples

Dans cette partie, on considère les suites suivantes :

- *la suite des entiers naturels notée $i = (0, 1, 2, 3, 4, \dots)$;*
- *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $g(\alpha) = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \dots)$;*
- *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la suite $e(\alpha)$ definie par $e(\alpha)_n = \alpha^n/n!$ pour tout $n \geqslant 0$.*

On utilisera la convention que $0^0 = 1$, ainsi $e(0) = (1, 0, 0, 0, 0, \dots) = g(0)$.

1. ***[Informatique]***

   (a) *Écrire une fonction `suiteI` qui prend en argument un entier naturel n puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à n de la suite i. Ainsi, `suiteI(4)` renvoie la liste `[0,1,2,3,4]`.*

   ▶ Par exemple :

```
def suiteI(n):
    L=[]
    for i in range(n+1):
        L=L+[i]
    return L
```

   (b) *On considère la fonction `mystere` écrite ci-contre.*

```
def mystere(alpha,n):
    L=[1]
    for i in range(n):
        print(L[i])
        L=L+[L[i]*alpha]
    return L
```

   i. *Détailler ce qu'affiche `mystere(2,4)`, c'est-à-dire le résultat de chaque exécution de l'instruction `print` et le résultat de l'instruction `return`.*

   ▶ Avant la boucle `for`, la liste `L` est initialisée à `L=[1]`. Ensuite, la boucle `for` va se répéter 4 fois, la variable `i` prenant successivement les valeurs entières de 0 à 3.

— Pour `i=0`, l'instruction `print` affiche `L[0]`, c'est-à-dire le premier élément de la liste `L=[1]`. Elle affiche donc $\boxed{1}$. Puis l'élément `L[0]*2=2` est ajouté à la fin de la liste `L` qui devient `L=[1,2]`.
— Pour `i=1`, l'instruction `print` affiche `L[1]`, c'est-à-dire le deuxième élément de la liste `L=[1,2]`. Elle affiche donc $\boxed{2}$. Puis l'élément `L[1]*2=4` est ajouté à la fin de la liste `L` qui devient `L=[1,2,4]`.
— Pour `i=2`, l'instruction `print` affiche `L[2]`, c'est-à-dire le troisième élément de la liste `L=[1,2,4]`. Elle affiche donc $\boxed{4}$. Puis l'élément `L[2]*2=8` est ajouté à la fin de la liste `L` qui devient `L=[1,2,4,8]`.
— Pour `i=3`, l'instruction `print` affiche `L[3]`, c'est-à-dire le quatrième élément de la liste `L=[1,2,4,8]`. Elle affiche donc $\boxed{8}$. Puis l'élément `L[2]*2=16` est ajouté à la fin de la liste `L` qui devient `L=[1,2,4,8,16]`.

Après la boucle `for`, l'instruction `return` renvoie la liste `L`, donc elle affiche $\boxed{\texttt{[1,2,4,8,16]}}$.

ii. *De manière générale, à quoi sert la fonction* `mystere` *(sans prendre en compte la ligne comportant l'inscrution* `print`*) ?*

▶ $\boxed{\text{La fonction mystere prend en arguments un réel } \alpha \text{ et un entier naturel } n \text{ puis renvoie la liste des termes d'indice 0 à } n \text{ de la suite } g(\alpha)}$.

(c) i. *Écrire une fonction* `fact` *qui permet de calculer la factorielle d'un entier naturel.*

▶ Par exemple :

```
def fact(n):
    P=1
    for i in range(1,n+1):
        P=P*i
    return P
```

ii. *En utilisant la fonction* `fact`*, écrire une fonction* `suiteE` *qui prend en arguments un réel α et un entier naturel n puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à n de la suite $e(\alpha)$.*

▶ Par exemple :

```
def suiteE(alpha,n):
    L=[]
    for i in range(n+1):
        L=L+[(alpha**i)/fact(i)]
    return L
```

(d) *Dans cette question, on suppose avoir déjà écrit deux fonctions* `suiteA` *et* `suiteB` *qui prennent en argument un entier naturel n puis qui renvoient la liste des termes d'indice 0 à n de deux suites a et b respectivement.*

i. *Écrire une fonction* `termeAstarB` *qui prend en argument un entier naturel n puis qui renvoie la valeur de $(a \star b)_n$.*

▶ Par exemple :

```
def termeAstarB(n):
    A=suiteA(n)
    B=suiteB(n)
    S=0
    for k in range(n+1):
        S=S+A[k]*B[n-k]
    return S
```

ii. *Écrire une fonction* `suiteAstarB` *qui prend en argument un entier naturel n puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à n de la suite $a \star b$.*

▶ Par exemple :

```
def suiteAstarB(n):
    L=[]
    for i in range(n+1):
        L=L+[termeAstarB(i)]
    return L
```

2. *Montrer que $(i \star i)_n = (n-1)n(n+1)/6$ pour tout $n \geqslant 0$.*

▶ Soit $n \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned}
(i \star i)_n &= \sum_{k=0}^{n} i_k i_{n-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k(n-k) \quad \text{par définition de la suite } i \\
&= n\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} k^2 \quad \text{par linéarité} \\
&= n\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{en reconnaissant des sommes usuelles} \\
&= \frac{n(n+1)}{6}\Big[3n-(2n+1)\Big] \quad \text{en factorisant par } \tfrac{n(n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)}{6}[n-1] = \boxed{\frac{(n-1)n(n+1)}{6}}.
\end{aligned}$$

3. *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :*

$$\forall n \geqslant 0, \quad (g(\alpha) \star g(\beta))_n = \begin{cases} (n+1)\alpha^n & \textit{si } \alpha = \beta \\ \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} & \textit{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}$$

▶ Soit $n \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned}
(g(\alpha) \star g(\beta))_n &= \sum_{k=0}^{n} g(\alpha)_k g(\beta)_{n-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \beta^{n-k} \quad \text{par définition des suites } g(\alpha) \text{ et } g(\beta) \\
&= \beta^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^k \quad \text{par propriétés de la puissance et par linéarité.}
\end{aligned}$$

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $\frac{\alpha}{\beta}$. On considère deux cas :

Pour la somme des termes d'une suite géométrique, n'oubliez pas de distinguer le cas où la raison est égale à 1.

<u>1^er cas</u> : $\frac{\alpha}{\beta} = 1 \iff \alpha = \beta$. Alors :

$$(g(\alpha) \star g(\beta))_n = \beta^n \sum_{k=0}^{n} 1 = \beta^n(n+1) = \boxed{(n+1)\alpha^n} \quad \text{car } \alpha = \beta.$$

<u>2^e cas</u> : $\frac{\alpha}{\beta} \neq 1 \iff \alpha \neq \beta$. Alors :

$$\begin{aligned}
(g(\alpha) \star g(\beta))_n &= \beta^n \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n+1} - 1}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} \\
&= \beta^n \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\beta^{n+1}} - 1}{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} = \beta^{n+1} \frac{\frac{\alpha^{n+1}}{\beta^{n+1}} - 1}{\alpha - \beta} = \boxed{\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}}.
\end{aligned}$$

Conclusion. Finalement, on a bien montré que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad (g(\alpha)\star g(\beta))_n = \begin{cases} (n+1)\alpha^n & \text{si } \alpha=\beta \\ \dfrac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta} & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}}$$

4. *Dans cette question, on propose de retrouver le résultat de la question précédente (qu'on ne pourra donc pas utiliser) à l'aide d'une méthode différente. On fixe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et on pose $u = g(\alpha)\star g(\beta)$.*

(a) *Calculer u_0 et u_1.*

▶ On a :

$$\begin{aligned} u_0 &= (g(\alpha)\star g(\beta))_0 \quad \text{par définition de la suite } u \\ &= \sum_{k=0}^{0} g(\alpha)_k g(\beta)_{0-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\ &= g(\alpha)_0 g(\beta)_0 \\ &= 1\times 1 = \boxed{1} \quad \text{par définition des suites } g(\alpha) \text{ et } g(\beta) \\ \text{et} \quad u_1 &= (g(\alpha)\star g(\beta))_1 \quad \text{par définition de la suite } u \\ &= \sum_{k=0}^{1} g(\alpha)_k g(\beta)_{1-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\ &= g(\alpha)_0 g(\beta)_1 + g(\alpha)_1 g(\beta)_0 \\ &= 1\times\beta + 1\times\alpha = \boxed{\beta+\alpha} \quad \text{par définition des suites } g(\alpha) \text{ et } g(\beta). \end{aligned}$$

(b) *Soit $n\geqslant 0$. Montrer que $(\alpha+\beta)u_{n+1} - u_{n+2} = \alpha\beta u_n$. Quel type de suite reconnaît-on ?*

▶ On a :

$$\begin{aligned} &(\alpha+\beta)u_{n+1} - u_{n+2} \\ =&(\alpha+\beta)(g(\alpha)\star g(\beta))_{n+1} - (g(\alpha)\star g(\beta))_{n+2} \quad \text{par définition de la suite } u \\ =&(\alpha+\beta)\sum_{k=0}^{n+1} g(\alpha)_k g(\beta)_{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n+2} g(\alpha)_k g(\beta)_{n+2-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\ =&\ (\alpha+\beta)\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^k\beta^{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n+2}\alpha^k\beta^{n+2-k} \quad \text{par définition des suites } g(\alpha) \text{ et } g(\beta) \\ =&\ (\alpha+\beta)\beta\sum_{k=0}^{n+1}\alpha^k\beta^{n-k} - \beta^2\sum_{k=0}^{n+2}\alpha^k\beta^{n-k} \quad \text{par propriétés de la puissance et par linéarité} \\ =&\ (\alpha+\beta)\beta\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha^k\beta^{n-k} + \alpha^{n+1}\beta^{-1}\right) - \beta^2\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha^k\beta^{n-k} + \alpha^{n+1}\beta^{-1} + \alpha^{n+2}\beta^{-2}\right) \\ &\text{par associativité} \\ =&\ \left[(\alpha+\beta)\beta - \beta^2\right]\sum_{k=0}^{n}\alpha^k\beta^{n-k} + (\alpha+\beta)\alpha^{n+1} - \beta\alpha^{n+1} - \alpha^{n+2} \\ =&\ \alpha\beta\sum_{k=0}^{n}\alpha^k\beta^{n-k} + 0 \quad \text{après simplifications} \\ =&\ \alpha\beta\sum_{k=0}^{n} g(\alpha)_k g(\beta)_{n-k} \quad \text{par définition des suites } g(\alpha) \text{ et } g(\beta) \\ =&\ \alpha\beta(g(\alpha)\star g(\beta))_n \quad \text{par définition du produit de convolution} \\ =&\ \boxed{\alpha\beta u_n} \quad \text{par définition de la suite } u. \end{aligned}$$

On a donc montré que :

$$\boxed{u_{n+2} = (\alpha+\beta)u_{n+1} - \alpha\beta u_n}.$$

Puisque ceci est vrai pour tout $n \geqslant 0$, on reconnaît $\boxed{\text{une suite récurrente linéaire d'ordre 2}}$.

(c) Conclure en distinguant les cas $\alpha = \beta$ et $\alpha \neq \beta$.

▶ On résout l'équation caractéristique d'inconnue $q \in \mathbb{C}$ associée à la suite u d'après la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 obtenue à la question précédente :

$$q^2 = (\alpha+\beta)q - \alpha\beta \iff q^2 - (\alpha+\beta)q + \alpha\beta = 0.$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant :

$$\begin{aligned}\Delta &= (-(\alpha+\beta))^2 - 4\times 1\times\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha-\beta)^2 \geqslant 0.\end{aligned}$$

On peut également éviter de perdre du temps à calculer ce discriminant en remarquant que α et β sont les solutions évidentes de l'équation caractéristique (car la somme des solutions vaut $\alpha+\beta$ et le produit vaut $\alpha\beta$). Mais attention : il faut distinguer le cas $\alpha = \beta$ où l'équation admet une seule solution double (donc $\Delta = 0$) et le cas $\alpha \neq \beta$ où l'équation admet deux solutions réelles distinctes (donc $\Delta > 0$).

<u>1^{er} cas</u> : $\alpha = \beta$ donc $\Delta = (\alpha-\beta)^2 = 0$. Alors l'équation caractéristique admet une seule solution double qui est :

$$q_0 = \frac{-(-(\alpha+\beta))}{2\times 1} = \frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha \quad \text{car } \alpha = \beta.$$

Dans ce cas, on sait qu'il existe deux constantes $(\alpha, \mu) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = (\alpha + \mu n)q_0^n = (\alpha+\mu n)\alpha^n.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient d'après les résultats de la question 4(a) :

$$1 = u_0 = (\lambda + \mu\times 0)\alpha^0 = \lambda \quad \text{et} \quad \beta + \alpha = u_1 = (\lambda+\mu\times 1)\alpha^1 = (\lambda+\mu)\alpha.$$

On en déduit que $\lambda = 1$ et $(1+\mu)\alpha = \alpha+\beta = 2\alpha$ (car $\alpha = \beta$) donc $\mu = 1$.

En toute rigueur, on obtient $\mu = 1$ seulement si $\alpha \neq 0$ (car si $\alpha = 0$ la relation $(1+\mu)\alpha = 2\alpha$ ne permet pas d'en déduire μ). Il faudrait donc distinguer le cas $\alpha = 0$. Mais dans ce cas $\alpha = \beta = 0$ et $u = g(0) \star g(0) = g(0)$, ce qui constitue donc un cas particulier inintéressant (et on retrouve bien le résultat à démontrer : $u_n = g(0)_n = 0^n = (n+1)0^n$).

On a donc montré dans le 1^{er} cas que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \boxed{u_n = (1+n)\alpha^n}.$$

<u>2^e cas</u> : $\alpha \neq \beta$ donc $\Delta = (\alpha-\beta)^2 > 0$. Alors l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes qui sont :

$$q_1 = \frac{-(-(\alpha+\beta)) + (\alpha-\beta)}{2\times 1} = \alpha \quad \text{et} \quad q_2 = \frac{-(-(\alpha+\beta)) - (\alpha-\beta)}{2\times 1} = \beta.$$

Dans ce cas, on sait qu'il existe deux constantes $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \lambda_1 q_1^n + \lambda_2 q_2^n = \lambda_1\alpha^n + \lambda_2\beta^n.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient d'après les résultats de la question 4(a) :

$$1 = u_0 = \lambda_1\alpha^0 + \lambda_2\beta^0 = \lambda_1 + \lambda_2 \quad \text{et} \quad \beta + \alpha = u_1 = \lambda_1\alpha^1 + \lambda_2\beta^1 = \lambda_1\alpha + \lambda_2\beta.$$

On en déduit que $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ et :

$$\beta + \alpha = \lambda_1\alpha + (1-\lambda_1)\beta = \beta + \lambda_1(\alpha - \beta) \quad \text{donc} \quad \lambda_1 = \frac{\alpha}{\alpha - \beta} \quad \text{car } \alpha - \beta \neq 0 \text{ puisque } \alpha \neq \beta$$

$$\text{et} \quad \lambda_2 = 1 - \lambda_1 = 1 - \frac{\alpha}{\alpha-\beta} = \frac{-\beta}{\alpha-\beta}.$$

On a donc montré dans le 2^e cas que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad \boxed{u_n = \frac{\alpha}{\alpha-\beta}\alpha^n + \frac{-\beta}{\alpha-\beta}\beta^n}.$$

Conclusion. Finalement, on a bien retrouvé que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad (g(\alpha) \star g(\beta))_n = u_n = \begin{cases} (n+1)\alpha^n & \text{si } \alpha = \beta \\ \dfrac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} & \text{si } \alpha \neq \beta. \end{cases}}$$

5. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on propose de calculer $i \star g(\alpha)$.*

(a) *Soit $n \geqslant 0$. Simplifier $(i \star g(\alpha))_n$ dans le cas où $\alpha = 1$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
(i \star g(1))_n &= \sum_{k=0}^{n} i_k g(1)_{n-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\
&= \sum_{k=0}^{n} k 1^{n-k} \quad \text{par définitions des suites } i \text{ et } g(1) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k = \boxed{\frac{n(n+1)}{2}} \quad \text{en reconnaissant une somme usuelle.}
\end{aligned}$$

(b) *Dans cette question, on suppose que $\alpha \neq 1$ et on pose $u = ((i \star g(\alpha))_{n+1} - (i \star g(\alpha))_n)_{n \geqslant 0}$.*

i. *Soit $n \geqslant 0$. Montrer que u_n est égal à la somme des $n+1$ premiers termes de la suite $g(\alpha)$ et en déduire une expression de u_n qui n'utilise pas le symbole Σ.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
u_n &= (i \star g(\alpha))_{n+1} - (i \star g(\alpha))_n \quad \text{par définition de la suite } u \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} i_k g(\alpha)_{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} i_k g(\alpha)_{n-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} k g(\alpha)_{n+1-k} - \sum_{k=0}^{n} k g(\alpha)_{n-k} \quad \text{par définition de la suite } i \\
&= \sum_{\ell=-1}^{n} (\ell+1) g(\alpha)_{n+1-(\ell+1)} - \sum_{k=0}^{n} k g(\alpha)_{n-k} \\
&\qquad \text{en utilisant le décalage d'indice } k = \ell + 1 \iff \ell = k - 1 \text{ dans la 1}^{\text{re}} \text{ somme} \\
&= 0 \times g(\alpha)_{n+1} + \sum_{k=0}^{n} (k+1) g(\alpha)_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} k g(\alpha)_{n-k} \quad \text{par associativité} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \Big(k + 1 - k\Big) g(\alpha)_{n-k} \quad \text{par linéarité} \\
&= \sum_{k=0}^{n} g(\alpha)_{n-k} \\
&= \boxed{\sum_{\ell=0}^{n} g(\alpha)_\ell} \quad \text{en utilisant l'inversion de l'ordre de sommation } \ell = n - k.
\end{aligned}$$

On retrouve bien $\boxed{\text{la somme des } n+1 \text{ premiers termes de la suite } g(\alpha)}$. Or la suite $g(\alpha)$ est définie par $g(\alpha) = (1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \dots)$. On reconnaît donc la somme des termes d'une suite géométrique de raison α. Puisque $\alpha \neq 1$ par hypothèse de l'énoncé, on en déduit que :

$$u_n = \sum_{\ell=0}^{n} g(\alpha)_\ell = \sum_{\ell=0}^{n} \alpha^\ell = \boxed{\frac{\alpha^{n+1}-1}{\alpha-1}}.$$

ii. Soit $n \geqslant 1$. En calculant la somme $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ de deux façons différentes, déterminer une expression de $(i \star g(\alpha))_n$ qui n'utilise pas le symbole Σ.

▶ On a d'une part :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^{k+1}-1}{\alpha-1} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente} \\
&= \frac{1}{\alpha-1}\left(\alpha \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k - \sum_{k=0}^{n-1} 1\right) \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{1}{\alpha-1}\left(\alpha \frac{\alpha^n-1}{\alpha-1} - n\right) \quad \text{en reconnaissant des sommes usuelles} \\
&= \frac{\alpha^{n+1}-\alpha-n(\alpha-1)}{(\alpha-1)^2} = \boxed{\frac{\alpha^{n+1}-(n+1)\alpha+n}{(\alpha-1)^2}}.
\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n-1} u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} \Big((i \star g(\alpha))_{k+1} - (i \star g(\alpha))_k\Big) \quad \text{par définition de la suite } u \\
&= (i \star g(\alpha))_{(n-1)+1} - (i \star g(\alpha))_0 \quad \text{en reconnaissant une somme télescopique} \\
&= \boxed{(i \star g(\alpha))_n - (i \star g(\alpha))_0}.
\end{aligned}$$

Or on a par définition du produit de convolution et des suites i et $g(\alpha)$:

$$(i \star g(\alpha))_0 = \sum_{k=0}^{0} i_k g(\alpha)_{0-k} = i_0 g(\alpha)_0 = 0 \times 1 = 0.$$

Par conséquent, on en déduit que :

$$\boxed{(i \star g(\alpha))_n = \frac{\alpha^{n+1}-(n+1)\alpha+n}{(\alpha-1)^2}}.$$

Remarquez que le calcul de cette expression est a priori vrai seulement pour $n \geqslant 1$ car la somme $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ n'a plus vraiment de sens si $n = 0$.

(c) Vérifier que l'expression obtenue à la question précédente reste vraie si $n = 0$ puis conclure.

▶ On a montré dans la question précédente que $(i \star g(\alpha))_0 = 0$. Or on obtient en remplaçant n par 0 dans l'expression obtenue à la question précédente :

$$\frac{\alpha^{0+1}-(0+1)\alpha+0}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha-\alpha}{(1-\alpha)^2} = 0.$$

Donc $\boxed{\text{l'expression reste vraie si } n = 0}$. Finalement, on a montré que :

$$\boxed{\forall n \geqslant 0, \quad (i \star g(\alpha))_n = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} & \text{si } \alpha = 1 \\ \frac{\alpha^{n+1}-(n+1)\alpha+n}{(\alpha-1)^2} & \text{si } \alpha \neq 1. \end{cases}}$$

N'oubliez pas le cas $\alpha = 1$ traité à la question 5(a). Rédigez des conclusions qui prennent en compte tous vos résultats intermédiaires afin de montrer que vous avez compris l'ordre logique des questions posées.

6. *Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. À l'aide d'une formule du cours à préciser, montrer que $e(\alpha) \star e(\beta) = e(\alpha + \beta)$, c'est-à-dire que $(e(\alpha) \star e(\beta))_n = e(\alpha + \beta)_n$ pour tout $n \geqslant 0$.*

▶ Soit $n \geqslant 0$. On a :

$$\begin{aligned}
(e(\alpha) \star e(\beta))_n &= \sum_{k=0}^{n} e(\alpha)_k e(\beta)_{n-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{\beta^{n-k}}{(n-k)!} \quad \text{par définition des suites } e(\alpha) \text{ et } e(\beta) \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \alpha^k \beta^{n-k} \quad \text{par linéarité} \\
&= \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \alpha^k \beta^{n-k} \quad \text{en reconnaissant la définition du coefficient binomial } \binom{n}{k} \\
&= \frac{1}{n!} (\alpha + \beta)^n \quad \text{d'après la } \boxed{\text{formule du binôme de Newton}} \\
&= \frac{(\alpha + \beta)^n}{n!} = \boxed{e(\alpha + \beta)_n} \quad \text{par définition de la suite } e(\alpha + \beta).
\end{aligned}$$

Puisque ceci est vrai pour tout $n \geqslant 0$, on a bien montré que :

$$\boxed{e(\alpha) \star e(\beta) = e(\alpha + \beta)}.$$

II) Résolution d'une équation de suites

Dans cette partie, on propose de résoudre des équations de la forme $a \star u = b$ où a et b sont deux suites fixées avec $a_0 \neq 0$ et u est une suite inconnue.

7. *Dans cette question, on suppose que $a = (\alpha, \beta, 0, 0, 0, \dots)$ et $b = (\gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \gamma, \dots)$ où α, β et γ sont trois constantes réelles fixées avec $\alpha \neq 0$. On considère une suite u solution de l'équation $a \star u = b$.*

   (a) *Déterminer u_0.*

   ▶ On sait que $a \star u = b$, donc $(a \star u)_n = b_n$ pour tout n$\geqslant 0$. En particulier, on a pour $n = 0$:

$$(a \star u)_0 = b_0 = \gamma \quad \text{par définition de la suite } b.$$

   Or :

$$(a \star u)_0 = \sum_{k=0}^{0} a_k u_{0-k} = a_0 u_0 = \alpha u_0 \quad \text{par définition du produit de convolution et de la suite } a.$$

   On en déduit que :

$$\alpha u_0 = (a \star u)_0 = b_0 = \gamma \quad \text{donc} \quad \boxed{u_0 = \frac{\gamma}{\alpha}} \quad \text{car } \alpha \neq 0.$$

   (b) *Soit $n \geqslant 0$. À l'aide de l'égalité $(a \star u)_{n+1} = b_{n+1}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Quel type de suite reconnaît-on ?*

   ▶ On a :

$$\begin{aligned}
(a \star u)_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k u_{n+1-k} \quad \text{par définition du produit de convolution} \\
&= a_0 u_{n+1} + a_1 u_n + \sum_{k=2}^{n+1} \underbrace{a_k}_{=0} u_{n+1-k} \quad \text{par associativité} \\
&= \alpha u_{n+1} + \beta u_n + 0 \quad \text{par définition de la suite } a.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\alpha u_{n+1} + \beta u_n = (a \star u)_{n+1} = b_{n+1} = \gamma \quad \text{par définition de la suite } b$$

$$\text{donc} \quad u_{n+1} = \frac{\gamma - \beta u_n}{\alpha} = \boxed{\frac{-\beta}{\alpha} u_n + \frac{\gamma}{\alpha}} \quad \text{car } \alpha \neq 0.$$

Puisque ceci est vrai pour tout $n \geqslant 0$, on reconnaît $\boxed{\text{une suite arithmético-géométrique}}$.

(c) *En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \geqslant 0$ et en distinguant deux cas.*

▶ On considère deux cas :

Pour une suite arithmético-géométrique, n'oubliez pas de distinguer le cas où la suite est arithmétique.

1^er^ cas : $\frac{-\beta}{\alpha} = 1 \iff \beta = -\alpha$. Alors la suite u est arithmétique de raison $\frac{\gamma}{\alpha}$ d'après le résultat de la question précédente et de premier terme $u_0 = \frac{\gamma}{\alpha}$ d'après le résultat de la question 7(a). Donc :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = \frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha} n = \boxed{\frac{\gamma}{\alpha}(n+1)}.$$

2^e^ cas : $\frac{-\beta}{\alpha} \neq 1 \iff \beta \neq -\alpha$. Alors on résout l'équation caractéristique d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ associée à la suite u d'après la relation de récurrence arithmético-géométrique obtenue à la question précédente :

$$x = \frac{-\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha} \iff x = \frac{\frac{\gamma}{\alpha}}{1 + \frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\gamma}{\alpha + \beta} \quad \text{car } 1 + \frac{\beta}{\alpha} \neq 0 \text{ puisque } \beta \neq -\alpha.$$

On pose une suite auxiliaire $w = (w_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $w_n = u_n - x$ pour tout $n \geqslant 0$. Alors :

$$\forall n \geqslant 0, \quad w_{n+1} = u_{n+1} - x = \left(\frac{-\beta}{\alpha} u_n + \frac{\gamma}{\alpha}\right) - \left(\frac{-\beta}{\alpha} x + \frac{\gamma}{\alpha}\right) = \frac{-\beta}{\alpha}\Big(u_n - x\Big) = \frac{-\beta}{\alpha} w_n.$$

On reconnaît une suite géométrique de raison $\frac{-\beta}{\alpha}$ et de premier terme :

$$w_0 = u_0 - x = \frac{\gamma}{\alpha} - \frac{\gamma}{\alpha + \beta} = \frac{\gamma\beta}{\alpha(\alpha+\beta)} \quad \text{d'après le résultat de la question 7(a).}$$

Donc :

$$\forall n \geqslant 0, \quad w_n = \frac{\gamma\beta}{\alpha(\alpha+\beta)} \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n.$$

On en déduit que :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_n = w_n + x = \boxed{\frac{\gamma\beta}{\alpha(\alpha+\beta)} \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n + \frac{\gamma}{\alpha+\beta}}.$$

Conclusion. Finalement, on a montré que :

$$\boxed{u_n = \begin{cases} \frac{\gamma}{\alpha}(n+1) & \text{si } \beta = -\alpha \\ \frac{\gamma\beta}{\alpha(\alpha+\beta)} \left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n + \frac{\gamma}{\alpha+\beta} & \text{si } \beta \neq -\alpha. \end{cases}}$$

8. *Dans cette question, on revient au cas général où a et b sont deux suites fixées avec $a_0 \neq 0$. Montrer que $a \star u = b$ si et seulement si u est la suite définie par*

$$u_0 = \frac{b_0}{a_0} \quad \textit{et la relation de récurrence :} \quad \forall n \geqslant 1, \quad u_n = \frac{b_n}{a_0} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_{n-k}}{a_0} u_k.$$

► On raisonne par double implication.
1re implication. On suppose que $a\star u=b$, donc $(a\star u)_n=b_n$ pour tout $n\geqslant 0$. On a en particulier $(a\star u)_0=b_0$ pour $n=0$. Or :

$$(a\star u)_0=\sum_{k=0}^{0}a_ku_{0-k}=a_0u_0 \quad \text{par définition du produit de convolution.}$$

On en déduit que :

$$a_0u_0=(a\star u)_0=b_0 \quad \text{donc} \quad \boxed{u_0=\frac{b_0}{a_0}} \quad \text{car } a_0\neq 0.$$

Soit $n\geqslant 1$. On a :

$$\begin{aligned}
b_n&=(a\star u)_n\\
&=\sum_{k=0}^{n}a_ku_{n-k} \quad \text{par définition du produit de convolution}\\
&=\sum_{\ell=0}^{n}a_{n-\ell}u_\ell \quad \text{en utilisant l'inversion de l'odre de sommation } k=n-\ell \iff \ell=n-k\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}u_k+a_0u_n \quad \text{par associativité.}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$u_n=\frac{b_n-\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}u_k}{a_0}=\boxed{\frac{b_n}{a_0}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{n-k}}{a_0}u_k} \quad \text{par linéarité.}$$

Puisque ceci est vrai pour tout $n\geqslant 1$, on a bien montré la 1re implication.
2e implication. On suppose que $u_0=\frac{b_0}{a_0}$ et que $u_n=\frac{b_n}{a_0}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{n-k}}{a_0}u_k$ pour tout $n\geqslant 1$. En reprenant les calculs de la 1re implication, on obtient :

$$(a\star u)_0=a_0u_0=a_0\frac{b_0}{a_0}=b_0$$

et pour tout $n\geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
(a\star u)_n&=\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}u_k+a_0u_n\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}u_k+a_0\left(\frac{b_n}{a_0}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{n-k}}{a_0}u_k\right)\\
&=\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}u_k+b_n-\sum_{k=0}^{n-1}a_{n-k}u_k=b_n.
\end{aligned}$$

On en déduit que $(a\star u)_n=b_n$ pour tout $n\geqslant 0$, donc $a\star u=b$ ce qui prouve la 2e implication.
Conclusion. Par double implication, on a bien montré l'équivalence :

$$\boxed{a\star u=b \iff \left(u_0=\frac{b_0}{a_0} \quad \text{et} \quad \forall n\geqslant 1,\ u_n=\frac{b_n}{a_0}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{a_{n-k}}{a_0}u_k\right)}.$$

On peut également aller plus vite en raisonnant directement par équivalences mais en n'oubliant pas de distinguer les cas $n=0$ et $n\geqslant 1$.

9. ***[Informatique]*** *On suppose avoir déjà écrit deux fonctions* `suiteA` *et* `suiteB` *qui prennent en argument un entier naturel n puis qui renvoient la liste des termes d'indice 0 à n des suites a et b respectivement. Le but de cette question est d'écrire une fonction* `solution` *qui prend en argument un entier naturel n puis qui renvoie la liste des termes d'indice 0 à n de l'unique suite u solution de l'équation $a\star u=b$. Pour cela, on considère la fonction suivante :*

```python
def n1porteKoi(n):
    A=suiteA(n)
    B=suiteB(n)
    L=[1]
    for i in range(1,n+1):
        S=0
        for k in range(i):
            S=S+A[k]*L[k]
        L=L+[B[i]-S]
    return L
```

(a) Que renvoie `n1porteKoi(1)` *en fonction de a_0, a_1, b_0 et b_1 ?*

▶ Avant la première boucle `for`, les listes `A`, `B` et `L` sont initialisées à `A=[`a_0`,`a_1`]`, `B=[`b_0`,`b_1`]` et `L=[1]`. Ensuite, la première boucle `for` va se répéter une seule fois, la variable `i` prenant seulement la valeur `i=1`. Avant la deuxième boucle `for`, la variable `S` est initialisée à `S=0`. Ensuite, la deuxième boucle `for` va se répéter une seule fois, la variable `k` prenant seulement la valeur `k=0`. Le nombre `A[0]*L[0]=`a_0`*1=`a_0 est ajouté à la variable `S` qui devient `S=`a_0. Après la deuxième boucle `for`, l'élément `B[1]-S=`b_1`-`a_0 est ajouté à la fin de la liste `L` qui devient `L=[1,`b_1`-`a_0`]`. Après la première boucle `for`, la fonction renvoie la liste `L`, c'est-à-dire $\boxed{[1,b_1-a_0]}$.

(b) Que doit renvoyer `solution(1)` *en fonction de a_0, a_1, b_0 et b_1 ?*

▶ D'après l'énoncé, `solution(1)` renvoie la liste des termes d'indice 0 à 1 de la suite u solution de l'équation $a \star u = b$, c'est-à-dire `[`u_0`,`u_1`]`. Or on a d'après le résultat de la question 8 :

$$u_0 = \frac{b_0}{a_0} \quad \text{et} \quad u_1 = \frac{b_1}{a_0} - \sum_{k=0}^{1-1} \frac{a_{1-k}}{a_0} u_k = \frac{b_1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0} u_0 = \frac{b_1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0}\frac{b_0}{a_0} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_0^2}.$$

Par conséquent, `solution(1)` renvoie $\boxed{[b_0/a_0,(a_0b_1-a_1b_0)/a_0^2]}$.

(c) Corriger la fonction `n1porteKoi` *pour obtenir une fonction* `solution`*.*

▶ Par exemple :

```python
def solution(n):
    A=suiteA(n)
    B=suiteB(n)
    L=[B(0)/A(0)]
    for i in range(1,n+1):
        S=0
        for k in range(i):
            S=S+A[i-k]*L[k]/A[0]
        L=L+[B[i]/A[0]-S]
    return L
```

N'hésitez pas à faire plusieurs essais de modifications de la fonction `n1porteKoi` *puis à vérifier le résultat de la question précédente pour chacun des essais à l'aide d'un raisonnement similaire à celui de la question 9(a). Par tâtonnements, vous comprendrez les effets de chaque modification et les essais suivants se rapprocheront de plus en plus de la fonction* `solution` *cherchée.*

DS 3 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

- Durée : 4 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

---

2 Étude des applications de $[|n|]$ dans lui-même.

2.1 Introduction et définitions

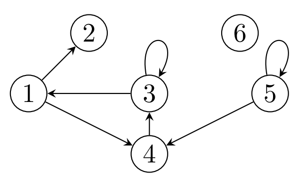
Dans tout le sujet, la notation $[|n|]$ désigne l'ensemble des entiers $\{1, 2, \ldots, n\}$. Par convention, $[|0|] = \emptyset$. L'objectif du problème est de décrire des parties de $F_n = \{f : [|n|] \to [|n|]\}$ vérifiant des propriétés particulières. Pour cela, on introduit un nouvel objet combinatoire : les graphes.

Définition 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Un **graphe** G **à** n **sommets** est un couple (n, A) où A est une partie de $[|n|] \times [|n|]$. Un élément $k \in [|n|]$ est appelé **sommet** de G et un couple $(i, j) \in A$ est appelée **arête** de G.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note $\mathcal{G}_n$ l'ensemble des graphes à n sommets.

Il est commode de représenter un graphe G par un dessin construit comme suit : on place tous les sommets de G et si (i, j) est une arête de G on dessine une flèche allant de i vers j.

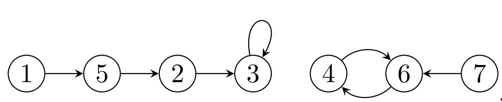
Par exemple, $G = (6, \{(1, 2), (1, 4), (3, 1), (3, 3), (4, 3), (5, 4), (5, 5)\})$ est un élément de $\mathcal{G}_6$ que l'on représente ainsi :



Définition 2. Soient $n \geq 1$ et $f : [|n|] \to [|n|]$ une application. On définit **le graphe** de f, noté G_f par :

$$G_f = (n, \{(i, f(i)), i \text{ décrit } [|n|]\}).$$

Par exemple, si l'application $f : [|7|] \to [|7|]$ est définie par : $f(1) = 5, f(2) = 3, f(3) = 3, f(4) = 6, f(5) = 2, f(6) = 4, f(7) = 6$ le graphe G_f est représenté par



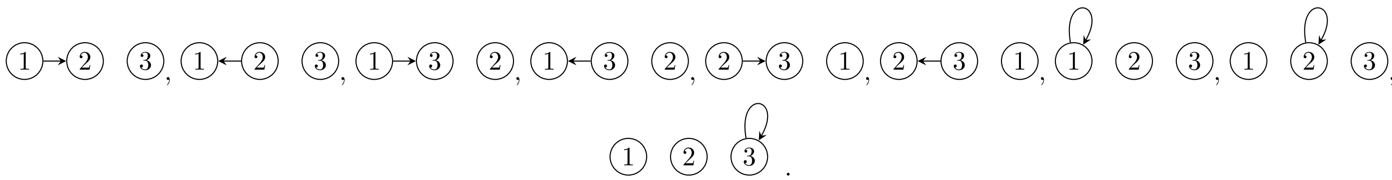
2.2 Dénombrement de familles de graphes

1. Dessiner tous les graphes de $\mathcal{G}_3$ ayant exactement 1 arête.
2. Quel est le nombre maximal d'arêtes pour un graphe G de $\mathcal{G}_3$?
3. Combien y-a-t-il de graphes de $\mathcal{G}_3$ ayant exactement 7 arêtes ?
4. Déterminer le cardinal de $\mathcal{G}_3$.
5. Soient $n \geq 1$ et $G \in \mathcal{G}_n$. Combien G a-t-il de sommets ? Quel est le nombre maximal d'arêtes pour G ?
6. Soit $n \geq 1$. Déterminer le cardinal de $\mathcal{G}_n$. Justifier votre réponse.
7. Soient $n \geq 1, k \in \mathbb{N}$. Combien y-a-t-il de graphes de $\mathcal{G}_n$ ayant exactement k arêtes ? Justifier votre réponse.

8. Soit $n \geq 1$. On dit qu'un graphe G de $\mathcal{G}_n$ est une chaîne s'il existe des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ de $[|n|]$ distincts deux à deux et tels que G est représenté par $a_1 \to a_2 \to \cdots \to a_{n-1} \to a_n$. Autrement dit, les arêtes de G sont exactement les couples de la forme (a_i, a_{i+1}) pour i décrivant $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.
Combien y-a-t-il de chaînes de $\mathcal{G}_n$? Justifier votre réponse.

Correction

1. Représentons les différents graphes de $\mathcal{G}_3$ ayant exactement 1 arête :



On a bien tous les graphes à une arête de $\mathcal{G}_3$ puisque par définition l'ensemble des arêtes possibles est exactement égal à

$$[|3|] \times [|3|] = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}.$$

2. L'ensemble des arêtes étant de cardinal 9, on en déduit que le nombre maximal d'arêtes d'un graphe de $\mathcal{G}_3$ est égal à 9.
3. On cherche à compter le nombre d'éléments de $\{(7, A), A \subset [|3|] \times [|3|] \text{ et } \mathrm{Card}(A) = 7\}$. Par construction, cela revient donc à compter le nombre de 7-combinaisons de $[|3|] \times [|3|]$ qui contient exactement 9 éléments. Il y en a donc exactement $\boxed{\binom{9}{7} = 36}$.
4. Par définition, $\mathcal{G}_3 = \{(3, A), A \subset [|3|] \times [|3|]\}$. Compter le nombre d'éléments de $\mathcal{G}_3$ revient donc à compter le nombre de sous-parties de $[|3|] \times [|3|]$. Or il y en a exactemment 2^9. Il en résulte que

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{G}_3) = 2^9.}$$

5. Soient $n \geq 1, G \in \mathcal{G}_n$. Par définition de G, il possède exactement n sommets. L'ensemble de ses arêtes étant une partie de $[|n|] \times [|n|]$, on en déduit que G a au plus n^2 arêtes.
6. Soit $n \geq 1$. Par définition, $\mathcal{G}_n = \{(n, A), A \subset [|n|] \times [|n|]\}$. Compter le nombre d'éléments de $\mathcal{G}_n$ revient donc à compter le nombre de sous-parties de $[|n|] \times [|n|]$. Or il y en a exactemment $2^{(n^2)}$. Il en résulte que

$$\boxed{\mathrm{Card}(\mathcal{G}_n) = 2^{(n^2)}.}$$

7. Soient $n \geq 1, k \in \mathbb{N}$. L'ensemble des graphes de $\mathcal{G}_n$ ayant exactement k arêtes que l'on note $E_{n,k}$ est exactement l'ensemble $\{(n, A), A \subset [|n|] \times [|n|] \text{ et } \mathrm{Card}(A) = k\}$. Il nous suffit donc de compter le nombre de k-combinaisons de $[|n|] \times [|n|]$ qui est de cardinal n^2. D'où

$$\boxed{\mathrm{Card}(E_{n,k}) = \binom{n^2}{k}.}$$

8. Soit $n \geq 1$. Notons $C_n = \{G \in \mathcal{G}_n | G \text{ est une chaîne}\}$ et L_n l'ensemble des n-listes sans répétition de $[|n|]$. Considérons les applications suivantes :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & C_n & \to & L_n \\ & a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n & \mapsto & [a_1, a_2, \ldots, a_n] \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rccc} \psi : & L_n & \to & C_n \\ & [a_1, a_2, \ldots, a_n] & \mapsto & a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n \end{array}.$$

Montrons que ϕ et ψ sont réciproques l'une de l'autre.

— Montrons que $\psi \circ \phi = I_{C_n}$.
Soit $a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n$ une chaîne. Par hypothèse, les a_i sont bien distincts deux à deux. Par construction :

$$\phi(a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n) = [a_1, a_2, \ldots, a_n].$$

D'où $\psi(\phi(a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n)) = \psi([a_1, a_2, \ldots, a_n]) = a_1 \to a_2 \to \ldots \to a_n$. On a bien $\psi \circ \phi = I_{C_n}$.

— Monntrons que $\phi \circ \psi = I_{L_n}$. Soit $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ un élément de L_n. Par hypothèse, les a_i sont bien distincts deux à deux. Par construction :

$$\psi([a_1, a_2, \dots, a_n]) = a_1 \to a_2 \to \dots \to a_n.$$

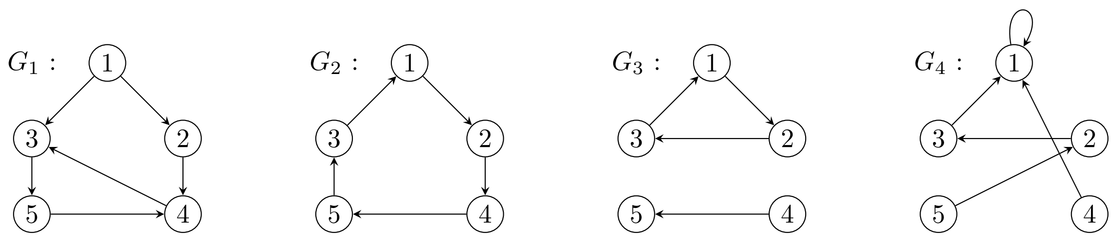
D'où $\phi(\psi([a_1, a_2, \dots, a_n)] = \phi(a_1 \to a_2 \to \dots \to a_n) = [a_1, a_2, \dots, a_n]$. On a bien $\phi \circ \psi = I_{L_n}$.

Il en résulte que ϕ est une bijection entre C_n et L_n. Ils ont donc le même cardinal. D'où

$$\boxed{\mathrm{Card}(C_n) = n!.}$$

2.3 Applications et graphes

9. Pour chacun des graphes G_i suivants



Expliquer s'il existe une application $f_i \in F_5$ vérifiant $G_{f_i} = G_i$. Dans le cas où f_i est bien définie, expliciter celle-ci.

10. Soit $n \geq 1$. On pose $A_n = \{G_f, f \text{ décrit } F_n\}$.
    (a) Montrer que pour tout $(f, h) \in F_n^2$, si $G_f = G_h$ alors $f = h$.
    (b) En déduire le cardinal de A_n.
11. Déduire des questions précédentes que pour tout $n \geq 1, n^n \leq 2^{(n^2)}$.

Correction

9. — G_1 ne peut pas être le graphe d'une application car $(1, 2), (1, 3)$ sont deux arêtes qui partent de 1.
   — En définissant $f_2 : [|5|] \to [|5|]$ par : $f(1) = 2, f(2) = 4, f(3) = 1, f(4) = 5, f(5) = 3$, on a bien $G_{f_2} = G_2$.
   — G_3 ne peut pas être le graphe d'une application car aucune arête ne part de 5.
   — En définissant $f_4 : [|5|] \to [|5|]$ par : $f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 1, f(4) = 1, f(5) = 2$, on a bien $G_{f_4} = G_4$.
10. Soit $n \geq 1$. On pose $A_n = \{G_f, f \text{ décrit } F_n\}$.
    (a) Soit $(f, h) \in F_n^2$, supposons que $G_f = G_h$. Montrons que $f = h$.
    Soit $i \in [|n|]$.
    Par hypothèse, $G_f = G_h$. Donc $(i, f(i)) = (i, h(i))$. Autrement dit, $f(i) = h(i)$.
    Il en résulte que $f = h$.
    (b) Dans la description de A_n, les éléments apparaissent une et une seule fois. Donc $\mathrm{Card}(A_n) = \mathrm{Card}(F_n)$.
    Donc :
    $$\boxed{\mathrm{Card}(A_n) = n^n.}$$
11. Soit $n \geq 1$. L'ensemble A_n étant inclus dans $\mathcal{G}_n$, on en déduit que

$$\mathrm{Card}(A_n) \leq \mathrm{Card}(\mathcal{G}_n).$$

D'où

$$\boxed{n^n \leq 2^{(n^2)}.}$$

2.4 Étude d'une partie de F_n

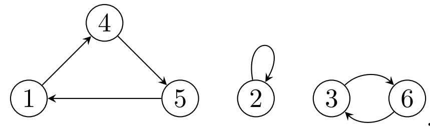
Dans la suite, pour tout $n \geq 1$ on note $I_n : [|n|] \to [|n|]$ l'application identité sur $[|n|]$ et pour tout élément $f \in F_n$ et $p \in \mathbb{N}$, la notation f^p désigne l'application $\underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{\text{p fois}}$. Par convention, $f^0 = I_n$. Étant donnés $f \in F_n$ et $x \in [|n|]$, une manière pratique de trouver la valeur de $f^p(x)$ à l'aide de G_f est de se placer sur x dans G_f et d'avancer p fois suivant le chemin indiqué par les arêtes. La valeur atteinte est alors $f^p(x)$. On définit également B_n par

$$B_n = \{f \in F_n | \exists p \geq 1, f^p = I_n\}$$

et on note b_n son cardinal.

Par exemple, si $f : [|6|] \to [|6|]$ est définie par $f(1) = 4, f(2) = 2, f(3) = 6, f(4) = 5, f(5) = 1, f(6) = 3$,

G_f :



, en partant de 1 et en avançant quatre fois, on arrive sur 4. On a donc $f^4(1) = 4$. Pour tout $i \in [|6|]$, on remarque que $f^6(i) = i$. Autrement dit $f^6 = I_6$. Par conséquent, f est un élément de B_6.

Désormais, on fixe $n \geq 1$.

12. Soit $f \in F_n$. Dans cette question, on démontre une condition suffisante pour que f ne soit pas un élément de B_n. On pourra utiliser cette propriété dans la suite du problème sans la redémontrer.
    (a) Montrer que pour tout $i \geq 1, f^i([|n|]) \subset f([|n|])$.
    (b) En déduire que si $f([|n|])$ est strictement inclus dans $[|n|]$ alors f n'est pas un élément de B_n.
13. Parmi les f_i existantes dans la question 9, la ou lesquelles sont des éléments de B_5 ? Justifier vos réponses.
14. Pour toute application f élément de B_3, dessiner le graphe G_f.
15. Pour chacune des applications f_i suivantes,
    (a) $f_1 : [|7|] \to [|7|], f_1(1) = 5, f_1(2) = 4, f_1(3) = 1, f_1(4) = 2, f_1(5) = 7, f_1(6) = 6, f_1(7) = 3$
    (b) $f_2 : [|7|] \to [|7|], f_2(1) = 3, f_2(2) = 5, f_2(3) = 4, f_2(4) = 7, f_2(5) = 7, f_2(6) = 3, f_2(7) = 4$
    (c) $f_3 : [|7|] \to [|7|], f_3(1) = 3, f_3(2) = 6, f_3(3) = 1, f_3(4) = 4, f_3(5) = 5, f_3(6) = 2, f_3(7) = 7$

    justifier s'il s'agit d'un élément de B_7. Dans le cas où f_i est un élément de B_7, expliciter une valeur $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $(f_i)^p = I_7$. Le détail des calculs n'est pas demandé.
16. Déterminer le nombre de $f \in B_7$ vérifiant $f^2 = I_7$. Expliquer votre réponse.
17. Soit f un élément de B_n. On note $p \geq 1$ un entier vérifiant $f^p = I_n$. Montrer que f est bijective et exprimer la réciproque de f en fonction de f et p.
18. Soit $f \in F_n$.
    (a) Montrer que la liste $[f, f^2, \ldots, f^{(n^n+1)}]$ contient au moins une répétition.

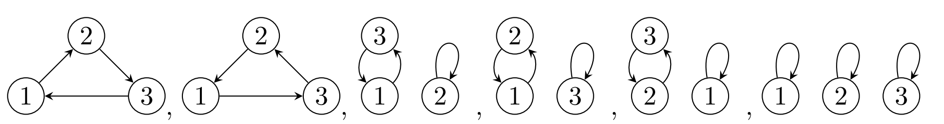
    Dans la suite, on fixe q, r des entiers vérifiant $1 \leq q < r \leq n^n + 1$ et $f^q = f^r$.
    (b) En déduire que si f est bijective alors il existe un entier $p \geq 1$ vérifiant $f^p = I_n$.
19. Déduire des questions précédentes une formule simple pour b_n.

Correction

12. Soit $f \in F_n$.
    (a) Soit $i \geq 1$. Montrons que $f^i([|n|]) \subset f([|n|])$.

    Soit $y \in f^i([|n|])$. Par définition, il existe $x \in [|n|]$ vérifiant $f^i(x) = y$. Autrement dit $f\left(f^{i-1}(x)\right) = y$. Or $f^{i-1}(x) \in [|n|]$. En posant $z = f^{i-1}(x)$, on a $z \in [|n|]$ et $f(z) = y$. Donc $y \in f([|n|])$.

    On a bien $f^i([|n|]) \subset f([|n|])$.
    (b) Supposons que $f([|n|])$ est strictement inclus dans $[|n|]$. Autrement dit f n'est pas surjective. D'après la question précédente,
    $$\forall i \geq 1, f^i([|n|]) \subset f([|n|]).$$
    Par transitivité de l'inclusion, pour tout $i \geq 1, f^i([|n|])$ est strictement inclus dans $[|n|]$. Donc pour tout $i \geq 1$, f^i n'est pas surjective. En particulier, pour tout $i \geq 1$, f^i n'est pas l'application identité. Autrement dit, f n'est pas un élément de B_n.
13. Constatons que l'on a $f_2^5 = I_5$ donc f_2 est un élément de B_5. On a $f_4([|5|]) = \{1, 2, 3\}$. Donc pour tout $i \geq 1$, $f_4^i([|5|])$ est nécessairement inclus dans $\{1, 2, 3\}$ et ne peut donc être égal à $[|5|]$ ce qui implique que $f_4^i \neq I_5$. Donc f_4 n'est pas un élément de B_4.
14. Représentons tous les éléments G_f où f est un élément de B_3 :



15. (a) Dans le cas de f_1, on constate que $f_1^4 = I_7$. Donc f_1 est bien un élément de B_7.

(b) Constatons que $f_2([|7|]) = \{3,4,5,7\}$. Donc pour tout $i \geq 1, f_2^i([|7|]) \subset \{3,4,5,7\}$. Il en résulte que pour tout $i \geq 1, f_2^i([|7|])$ n'est jamais égal à $[|7|]$ et donc $f_2^i \neq I_7$. Ainsi, f_2 n'est pas un élément de B_7.

(c) On constate que l'on a $f_3^2 = I_7$. Donc f_3 est un élément de B_7.

16. Notons $C = \{f \in B_7 | f^2 = I_7\}$. Soient $f \in B_7$, $i \in [|7|]$ et vérifiant $f^2 = I_7$.

— Cas 1 : $f(i) = i$

— Cas 2 : $f(i) \neq i$. Et dans ce cas, $f^2(i) = i$.

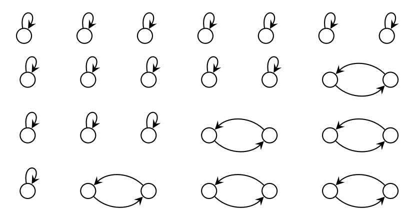
Ainsi, étant donné un point $i \in [|7|]$ il y a deux possibilités : i est fixe ($f(i) = i$) ou non ($f(i) \neq i$) et dans ce dernier cas, on peut regrouper i et $f(i)$. Décrivons les graphes associés aux éléments de C. Étant donné un élément $f \in C$, en notant $(7, A) = G_f$, les arêtes de A vérifient les propriétés :

— $P_1 : \forall i \in [|7|], \exists! j \in [|7|], (i,j) \in A$.

— $P_2 : \forall (i,j) \in [|7|]^2, (i,j) \in A \iff (j,i) \in A$.

Réciproquement, on peut remarquer que si un graphe $G = (7, A)$ vérifie les deux propriétés précédentes, alors il existe $f \in C$ vérifiant $G_f = G$. Ainsi, compter le nombre d'éléments de C revient à compter le nombre de graphes vérifiant les propriétés P_1 et P_2. En représentant les différentes formes possibles de graphes, on constate que l'on est dans un des cas suivants :

F1 :
F2 :
F3 :
F4 :



Pour chacune des formes de graphes, on va compter le nombre de façons de les numéroter.

— Dans le cas de F1 : il y a une seule façon de numéroter, on constate que l'ordre dans lequel on numérote donne toujours le même élément.

— Dans le cas de F2 : il y a $\binom{7}{2}$ façons de numéroter les éléments pour le cycle de taille 2. Les autres entiers sont utilisés pour numéroter les cycles de taille 1. On a donc $\binom{7}{2} = 21$ éléments de cette forme.

— Dans le cas de F3 : il y a $\binom{7}{3}$ façons de numéroter les trois cycles de taille 1. Il reste alors 4 éléments que l'on note a, b, c, d pour numéroter les deux cycles de taille 2. On a alors les possibilités suivantes : $a \leftrightarrow b$ $c \leftrightarrow d$, $a \leftrightarrow c$ $b \leftrightarrow d$, $a \leftrightarrow d$ $b \leftrightarrow c$. En tout, il y a $3\binom{7}{3} = 105$ éléments qui ont comme forme F3.

— Dans le cas de F4 : il y a 7 façons de numéroter le cycle de taille 1. Notons $a < b < c < d < e < f$ les 6 éléments restants. Il y a 5 façons d'associer un élément de a : $a \leftrightarrow r$ où $r \in \{b, c, d, e, f\}$. Après avoir associé a, il reste 4 éléments à regrouper par paires. Or ce cas a été traité dans F3 et il y en a 3. Donc il y a exactement 15 façons de regrouper par paires les éléments a, b, c, d, e, f.
Ainsi, il y a exactement $7 \times 15 = 105$ éléments de forme F4.

Un élément ne pouvant avoir qu'une forme, on en déduit que le nombre d'éléments de C est égal à :

$$\boxed{1 + 21 + 105 + 105 = 232}.$$

17. Soit f un élément de B_n. On note $p \geq 1$ un entier vérifiant $f^p = I_n$. On a donc : $f \circ f^{p-1} = I_n$ et $f^{p-1} \circ f = I_n$. Il en résulte que f est bijective et admet comme réciproque f^{p-1}. Autrement dit, $\boxed{f^{-1} = f^{p-1}}$.

18. Soit $f \in F_n$.

(a) Posons $L = [f, f^2, \ldots, f^{(n^n+1)}]$. Par définition, L est une liste de taille $n^n + 1$ d'éléments de F_n. Or F_n ne contient que n^n éléments. Donc au moins deux éléments de cette listes sont égaux. Autrement dit, il existe q, r des entiers vérifiant $1 \leq q < r \leq n^n + 1$ et $f^q = f^r$.

(b) On a : $f^q = f^r$. f étant par hypothèse bijective, f^q aussi. D'où, en composant par f^{-q} :

$$I_n = f^{r-q}.$$

Comme $r > q$, en posant $p = r - q$, on a bien $p \geq 1$ et $f^p = I_n$. Il en résulte que

$$\boxed{f \in B_n}.$$

19. D'après les questions 16 et 17, on en déduit que $B_n = \{f \in F_n | f \text{ bijective}\}$. Par conséquent, $\boxed{b_n = n!}$.