DS 4 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$. L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation matricielle d'inconnue $M \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{C})$:

$$AM = 0_{3,3}. \tag{E}$$

On note $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$, $X_1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice M vérifie l'équation (E) si et seulement si $AX_1 = 0_{3,1}, AX_2 = 0_{3,1}$ et $AX_3 = 0_{3,1}$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{C})$. Résoudre l'équation : $AX = 0_{3,1}$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 2. On veut calculer une primitive de la fonction f définie par : $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin(\ln(x)). \end{array}$

1. Expliciter le domaine de définition D_f de f.
2. Pour tout $t \in D_f$, on pose $F(t) = \int_1^t \sin(\ln(x))dx$. On fixe $t \in D_f$.
   (a) En effectuant le changement de variable $u = \ln(x)$, montrer que l'on peut écrire $F(t)$ sous la forme :
   $$F(t) = \int_a^b \sin(u)g(u)du,$$
   où a, b sont des réels et g une fonction à déterminer.
   (b) À l'aide de deux intégrations par parties succesives, montrer que $F(t) = t\sin(\ln(t)) - t\cos(\ln(t)) + 1 - F(t)$.
3. En déduire une primitive de f.

Exercice 3. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose :

$$D_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) | A \text{ diagonale et } A^2 = A\}.$$

D_n est donc l'ensemble des matrices diagonales de taille n égales à leur carré.

1. Parmi les matrices suivantes, laquelle (ou lesquelles) est (sont) dans D_3 ?
   $$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
2. Soit $n \geq 1$. Déterminer la (ou les matrices) de D_n qui est (sont) inversible(s).
3. Soit $n \geq 1$. Soit D une matrice diagonale de taille n. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note d_i le i^{e} coefficient de la diagonale de D.
   (a) Montrer que D est un élement de D_n si et seulement si : $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, d_i = d_i^2$.
   (b) En déduire le cardinal de D_n.
4. Soient $n \geq 1$ et $A \in D_n$. Écrire $(A + I_n)^{100}$ sous la forme $aI_n + bA$ où a, b sont des réels à déterminer. On donnera des expressions simples de a et b.

Exercice 4. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Déterminer les variations de la fonction f.
2. Montrer que f réalise une bijection du segment $[0,1]$ vers un segment J à déterminer.
3. Expliciter $\phi : J \to [0,1]$, la réciproque de la fonction f restreinte sur $[0,1]$.

Exercice 5. Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \cos(\frac{x}{2})^4$, (Indication : linéariser $\cos(\frac{x}{2})^4$)
2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ (Indication : trouver a, b, c réels tels que $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}$)
3. $f_3 : x \mapsto (3x+1)\sin(3x^2 + 2x - 7)$

Exercice 6. Pour chacune des matrices suivantes, calculer leur rang. Dans le cas où la matrice est inversible, calculer son inverse.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Décrire l'ensemble des matrices P carrées de taille 2 vérifiant :

$$AP = PA.$$