DS 4 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

— Durée : 3 heures.

— Documents et calculatrice non autorisés.

— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Exercice 1. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$. L'objectif de cet exercice est de résoudre l'équation matricielle d'inconnue $M \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{C})$:

$$AM = 0_{3,3}. \tag{E}$$

On note $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$, $X_1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice M vérifie l'équation (E) si et seulement si $AX_1 = 0_{3,1}, AX_2 = 0_{3,1}$ et $AX_3 = 0_{3,1}$.
2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{C})$. Résoudre l'équation : $AX = 0_{3,1}$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Correction

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 10 \end{pmatrix}$. On note $M = (m_{ij})_{1\leq i,j\leq 3}$, $X_1 = \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \\ m_{31} \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \\ m_{32} \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} m_{13} \\ m_{23} \\ m_{33} \end{pmatrix}$.

1. Démontrons la proposition par double implication.
   - Supposons que M vérifie l'équation (E). Par hypothèse, on a donc : $AM = 0_{3,3}$. En effectuant le produit, on obtient :

     $$\begin{pmatrix} m_{11} - m_{21} + 2m_{31} & m_{12} - m_{22} + 2m_{32} & m_{13} - m_{23} + 2m_{31} \\ -m_{11} + 3m_{21} + 2m_{31} & -m_{12} + 3m_{22} + 2m_{32} & -m_{13} + 3m_{23} + 2m_{33} \\ 3m_{11} - m_{21} + 10m_{31} & 3m_{12} - m_{22} + 10m_{32} & 3m_{13} - m_{23} + 10m_{33} \end{pmatrix} = 0_{3,3}$$

     Autrement dit,

     $$\begin{pmatrix} m_{11} - m_{21} + 2m_{31} \\ -m_{11} + 3m_{21} + 2m_{31} \\ 3m_{11} - m_{21} + 10m_{31} \end{pmatrix} = 0_{3,1}, \begin{pmatrix} m_{12} - m_{22} + 2m_{32} \\ -m_{12} + 3m_{22} + 2m_{32} \\ 3m_{12} - m_{22} + 10m_{32} \end{pmatrix} = 0_{3,1}, \begin{pmatrix} m_{13} - m_{23} + 2m_{33} \\ -m_{13} + 3m_{23} + 2m_{33} \\ 3m_{13} - m_{23} + 10m_{33} \end{pmatrix} = 0_{3,1}.$$

     En réécrivant sous forme de produits de matrices, on a donc :

     $$AX_1 = 0_{3,1}, AX_2 = 0_{3,1}, AX_3 = 0_{3,1}.$$

   - Réciproquement, supposons que $AX_1 = 0_{3,1}, AX_2 = 0_{3,1}, AX_3 = 0_{3,1}$. Montrons que $AM = 0_{3,3}$. Par hypothèse, on a donc :

     $$\begin{pmatrix} m_{11} - m_{21} + 2m_{31} \\ -m_{11} + 3m_{21} + 2m_{31} \\ 3m_{11} - m_{21} + 10m_{31} \end{pmatrix} = 0_{3,1}, \begin{pmatrix} m_{12} - m_{22} + 2m_{32} \\ -m_{12} + 3m_{22} + 2m_{32} \\ 3m_{12} - m_{22} + 10m_{32} \end{pmatrix} = 0_{3,1}, \begin{pmatrix} m_{13} - m_{23} + 2m_{33} \\ -m_{13} + 3m_{23} + 2m_{33} \\ 3m_{13} - m_{23} + 10m_{33} \end{pmatrix} = 0_{3,1}.$$

D'où, en mettant les colonnes dans une même matrice :

$$\begin{pmatrix} m_{11}-m_{21}+2m_{31} & m_{12}-m_{22}+2m_{32} & m_{13}-m_{23}+2m_{31} \\ -m_{11}+3m_{21}+2m_{31} & -m_{12}+3m_{22}+2m_{32} & -m_{13}+3m_{23}+2m_{33} \\ 3m_{11}-m_{21}+10m_{31} & 3m_{12}-m_{22}+10m_{32} & 3m_{13}-m_{23}+10m_{33} \end{pmatrix} = 0_{3,3}$$

En écrivant sous forme de produit de matrices, on obtient donc :

$$AM = 0_{3,3}.$$

Par double implication, on en déduit que l'équivalence est vraie.

2. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{C})$. Résolvons l'équation : $AX = 0_{3,1}$.

$$AX = 0_{3,1} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 - x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 0 \\ 3x_1 - x_2 + 10x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

En effectuant successivement les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1, L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, on obtient :

$$AX = 0_{3,1} \iff \left\{ \begin{array}{llllll} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ & 2x_2 & +4x_3 & = & 0 \\ & 2x_2 & +4x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

L_2 et L_3 étant égales, on en déduit que

$$AX = 0_{3,1} \iff \left\{ \begin{array}{lllll} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & 0 \\ & 2x_2 & +4x_3 & = & 0 \end{array} \right. .$$

En choisissant x_3 comme paramètre, on a donc :

$$AX = 0_{3,1} \iff \left\{ \begin{array}{lcl} x_1 & = & -4x_3 \\ x_2 & = & -2x_3 \end{array} \right. .$$

Donc

$$\boxed{S = \left\{ \begin{pmatrix} -4t \\ -2t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{C} \right\}}.$$

3. D'après 1, on sait que M est solution de l'équation (E) si et seulement si $AX_1 = 0_{3,1}, AX_2 = 0_{3,1}, AX_3 = 0_{3,1}$. D'après 2, on sait que $AX_1 = 0_{3,1}, AX_2 = 0_{3,1}, AX_3 = 0_{3,1}$ si et seulement s'il existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ vérifiant $X_1 = a \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = b \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_3 = c \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Par conséquent, l'ensemble des solutions de (E) est égal à

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} -4a & -4b & -4c \\ -2a & -2b & -2b \\ a & b & c \end{pmatrix}, (a,b,c) \in \mathbb{C}^3 \right\}}.$$

Exercice 2. On veut calculer une primitive de la fonction f définie par : $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin(\ln(x)). \end{array}$

1. Expliciter le domaine de définition D_f de f.
2. Pour tout $t \in D_f$, on pose $F(t) = \int_1^t \sin(\ln(x))dx$. On fixe $t \in D_f$.
   (a) En effectuant le changement de variable $u = \ln(x)$, montrer que l'on peut écrire $F(t)$ sous la forme :

$$F(t) = \int_a^b \sin(u)g(u)du,$$

où a, b sont des réels et g une fonction à déterminer.

(b) À l'aide de deux intégrations par parties succesives, montrer que $F(t) = t\sin(\ln(t)) - t\cos(\ln(t)) + 1 - F(t)$.

3. En déduire une primitive de f.

Correction

On veut calculer une primitive de la fonction f définie par : $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin(\ln(x)). \end{array}$

1. On a $D_f = \mathbb{R}^{+\star}$.
2. (a) Effectuons le changement de variable $u = \ln(x)$. La fonction ln étant bien C^1 sur le segment $[1, t]$ (car $t > 0$), le changement de variable est donc possible. De plus, on a :

$$\forall x \in [1, t], u = ln(x), du = \frac{dx}{x}$$

D'où :

$$e^u = x, e^u du = dx.$$

Donc $\sin(\ln(x))dx = \sin(u)e^u du$. Lorsque $x = 1$, on a $u = 0$ et lorsque $x = t, u = \ln(t)$. Il en résulte que :

$$\boxed{F(t) = \int_0^{\ln(t)} \sin(u)e^u du}.$$

On a donc l'égalité demandée avec $\underline{a = 0, b = \ln(t), g = \exp}$.

(b) Posons $g_1 = \sin, g_2 = \exp$. g_1, g_2 sont bien respectivement de classe C^1 et C^0 sur $[0, \ln(t)]$. En intégrant par parties $F(t)$ (on dérive g_1 et on primitive g_2), on obtient :

$$F(t) = [\sin(u)\exp(u)]_{u=0}^{u=\ln(t)} - \int_0^{\ln(t)} \cos(u)\exp(u)du$$

D'où :

$$F(t) = t\sin(\ln(t)) - \int_0^{\ln(t)} \cos(u)\exp(u)du$$

En effectuant une nouvelle intégration par parties (en dérivant cos et en primitivant exp), on obtient

$$F(t) = t\sin(\ln(t)) - \left([\cos(u)e^u]_{u=0}^{u=\ln(t)} - \int_0^{\ln(t)} (-\sin(u))e^u du \right)$$

En simplifiant l'expression de droite, on a alors :

$$F(t) = t\sin(\ln(t)) - t\cos(\ln(t)) + 1 - \int_0^{\ln(t)} \sin(u)e^u du.$$

On constate alors que l'intégrale de droite est exactement $F(t)$. D'où

$$\boxed{F(t) = t\sin(\ln(t)) - t\cos(\ln(t)) + 1 - F(t)}.$$

3. f étant la composée de fonctions continues sur leur domaine de définition, elle est bien continue sur D_f. D'après le théorème fondammentale de l'analyse, on en déduit que F est une primitive de f. Or d'après la question 2,

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+\star}, F(t) = t\sin(\ln(t)) - t\cos(\ln(t)) - F(t) + 1.$$

Autrement dit,

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+\star}, F(t) = \frac{1}{2}(t\sin(\ln(t)) - t\cos(\ln(t)) + 1).$$

Une primitive de f est donc donnée par la fonction F définie par :

$$\boxed{\begin{array}{rccl} F: & \mathbb{R}^{+\star} & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & \frac{1}{2}(t\sin(\ln(t)) - t\cos(\ln(t)) + 1) \end{array}}.$$

Exercice 3. Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose :

$$D_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) | A \text{ diagonale et } A^2 = A\}.$$

D_n est donc l'ensemble des matrices diagonales de taille n égales à leur carré.

1. Parmi les matrices suivantes, laquelle (ou lesquelles) est (sont) dans D_3 ?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Soit $n \geq 1$. Déterminer la (ou les matrices) de D_n qui est (sont) inversible(s).
3. Soit $n \geq 1$. Soit D une matrice diagonale de taille n. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note d_i le i^{e} coefficient de la diagonale de D.
   (a) Montrer que D est un élement de D_n si et seulement si : $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, d_i = d_i^2$.
   (b) En déduire le cardinal de D_n.
4. Soient $n \geq 1$ et $A \in D_n$. Écrire $(A + I_n)^{100}$ sous la forme $aI_n + bA$ où a, b sont des réels à déterminer. On donnera des expressions simples de a et b.

Correction

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on pose :

$$D_n = \{A \in M_n(\mathbb{C}) | A \text{ diagonale et } A^2 = A\}.$$

D_n est donc l'ensemble des matrices diagonales de taille n égales à leur carré.

1. En calculant A_1^2, le deuxième coefficient de la diagonale est égale à $1 \neq -1$. Donc $A_1^2 \neq A_1$. A_1 n'est pas un élément de D_n. Concernant A_2, A_2 est bien diagonale et son carré est égale à A_2. Donc A_2 est bien un élément de D_n. A_3 n'étant pas diagonale, ce n'est pas un élément de D_n.
2. Soit $n \geq 1$. Soit A un élément de SD_n inversible. Par définition, on a donc :

$$A^2 = A.$$

   En multipliant à gauche par A^{-1}, on obtient

$$A = I_n.$$

   Réciproquement, I_n est bien diagonale et est égale à son carrée.
   Donc la matrice $\underline{I_n \text{ est l'unique matrice inversible de } D_n.}$
3. Soit $n \geq 1$. Soit D une matrice diagonale de taille n. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, on note d_i le i^{e} coefficient de la diagonale de D.
   (a) Raisonnons par double implication.
   — Supposons que $D^2 = D$. Pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}, (D^2)_{ii} = d_i^2$ car D est diagonale. Or par hypothèse, $(D^2)_{ii} = D_{ii} = d_i$ pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. D'où

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} d_i^2 = d_i.$$

   — Supposons que pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}, d_i = d_i^2$.
   D étant une matrice diagonale, on a :

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, (D^2)_{ii} = d_i^2.$$

   D'où

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, (D^2)_{ii} = d_i$$

   Donc D^2 et D coincident sur la diagonale. De plus, en dehors de cette dernière, tous leurs coefficients sont nuls. On a bien $D^2 = D$

   D'après le principe de double implication, on a bien : $\underline{D \text{ est un élement de } D_n \text{ si et seulement si : } \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, d_i = d_i^2.}$

   (b) Compter le nombre d'éléments de D_n revient donc à compter le nombre de $(d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant : $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, d_i = d_i^2$. Or $x = x^2 \iff (x = 0 \text{ ou } x = 1)$. Donc cela revient à compter le nombre d'éléments de $\{0, 1\}^n$. Or cet ensemble est de cardinale 2^n. $\underline{\text{Donc } D_n \text{ est de cardinal } 2^n}$.

4. Soient $n \geq 1$ et $A \in D_n$. Calculons $(A+I_n)^{100}$. On a $AI_n = I_nA = A$. Donc d'après la formule du binôme,
$$(A+I_n)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} A^k I_n^{100-k}.$$
D'où
$$(A+I_n)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} A^k.$$
Or $A^2 = A$. Donc, pour tout $k \geq 1, A^{k+1} = A^k$. D'où : $\forall k \geq 1, A^k = A$. En remplaçant dans la somme,
$$(A+I_n)^{100} = I_n + \sum_{k=1}^{100} \binom{100}{k} A.$$
Donc
$$(A+I_n)^{100} = I_n + (\sum_{k=1}^{100} \binom{100}{k})A.$$
D'où
$$(A+I_n)^{100} = I_n + (-1 + \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k})A.$$
En appliquant la formule du binôme,
$$\boxed{(A+I_n)^{100} = I_n + (-1+2^{100})A.}$$

Exercice 4. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. Déterminer les variations de la fonction f.
2. Montrer que f réalise une bijection du segment $[0,1]$ vers un segment J à déterminer.
3. Expliciter $\phi : J \to [0,1]$, la réciproque de la fonction f restreinte sur $[0,1]$.

Correction

On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$.

1. La fonction f étant le quotient de deux fonctions polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2(1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2}.$$
D'où, en simplifiant et en factorisant :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-2(x+1)(x-1)}{(1+x^2)^2}.$$
On en déduit que f' est négative sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$ et est positive sur $[-1,1]$. De plus, elle s'annule uniquement en -1 et 1. Par conséquent :
   — f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$,
   — f est strictement croissante sur $[-1,1]$,
   — f est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.
2. f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est en particulier continue sur l'intervalle $[0,1]$. De plus, elle est strictement croissante sur $[-1,1]$ donc en particulier sur l'intervalle $[0,1]$. D'après le théorème de la bijection continue, <u>la fonction f réalise une bijection de $[0,1]$ vers $J = [f(0), f(1)] = [0,1]$</u>.
3. Explicitons ϕ. Soient $x \in [0,1], y \in [0,1]$. On a :
$$\begin{aligned} f(x) = y &\iff \tfrac{2x}{1+x^2} = y \\ &\iff 2x = y + x^2y \\ &\iff x^2y - 2x + y = 0 \end{aligned}$$
   — Cas 1 : $y = 0$. Dans ce cas, $x = 0$.

— Cas 2 : $y \neq 0$. On reconnaît alors une équation du second degré de discriminant $4(1-y^2)$. On en déduit que

$$f(x) = y \iff (x = \frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y})$$

Or $x \in [0,1]$ et $\frac{1+\sqrt{1-y^2}}{y} \geq 1$ car le numérateur est plus grand que 1 et on multiplie par $\frac{1}{y}$ qui est plus grand que 1. Il en résulte que

$$f(x) = y \iff x = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}.$$

Donc la fonction ϕ est donnée par :

$$\boxed{\forall x \in [0,1], \phi(x) = \frac{1-\sqrt{1-y^2}}{y}.}$$

Exercice 5. Déterminer une primitive pour chacune des fonctions suivantes :

1. $f_1 : x \mapsto \cos(\frac{x}{2})^4$, (Indication : linéariser $\cos(\frac{x}{2})^4$)
2. $f_2 : x \mapsto \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ (Indication : trouver a, b, c réels tels que $\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x+3}$)
3. $f_3 : x \mapsto (3x+1)\sin(3x^2+2x-7)$

Correction

On ne détaille pas tous les calculs.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$.
$$\begin{array}{rcl} \cos(\frac{x}{2})^4 & = & \frac{1}{2^4}(e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}})^4 \\ & = & \frac{1}{2^4}(e^{2ix} + 4e^{ix} + 6 + 4e^{-ix} + e^{-2ix}) \quad \text{(formule du binôme)} \\ & = & \frac{1}{8}(\cos(2x) + 4\cos(x) + 3) \end{array}.$$
On en déduit qu'une primitive de f_1 est donnée par $F_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, F_1(x) = \frac{1}{16}\sin(2x) + \frac{1}{2}\sin(x) + \frac{3}{8}x$.
2. Pour tout x réel différent de $-1, -2, -3$, on a :
$$\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{\frac{1}{2}}{x+3}.$$
On en déduit qu'une primitive de f_2 est donnée par F_2 définie par :
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,-2,-3\} F_2(x) = \frac{1}{2}\ln(|x+1|) - \ln(|x+2|) + \frac{1}{2}\ln(|x+3|).}.$$
3. En définissant $F_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R}, F_3(x) = -\frac{1}{2}\cos(3x^2+2x-7),$$
on constate que F_3 est bien une primitive de f_3.

Exercice 6. Pour chacune des matrices suivantes, calculer leur rang. Dans le cas où la matrice est inversible, calculer son inverse.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -5 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & -6 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{2} & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Correction

On ne détaille pas tous les calculs.

— A_1 est de rang 3 et est inversible. De plus,

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -6 & 4 & -7 \\ 11 & -7 & 13 \end{pmatrix}$$

— En effectuant $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_1, L_3 \leftarrow L_3 - L_2 - L_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Puis, on effectue $L_1 \leftrightarrow L_2$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & -8 & 8 & 1 \\ 0 & -8 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$:

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 5 & -5 & 0 \\ 0 & \underline{-8} & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

la matrice A_2 est donc de rang 2.

— Calculons le déterminant de A_3 : $\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$. Or $(3\sqrt{2})^2 = 18 > 5$. Donc le déterminant de A_3 est bien non nul. A_3 est bien inversible et

$$\boxed{A_3^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5} - 3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -3 \\ -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.}$$

Exercice 7. On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ Décrire l'ensemble des matrices P carrées de taille 2 vérifiant :

$$AP = PA.$$

Correction

Écrivons P sous la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ En effectuant les produits, $AP = PA$ se réécrit :

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - b & 2a + 2b \\ c - d & 2c + 2d \end{pmatrix}$$

Cette équation matricielle est donc équivalente au système :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a + 2c & = & a - b \\ b + 2d & = & 2a + 2b \\ -a + 2c & = & c - d \\ -b + 2d & = & 2c + 2d \end{array} \right. .$$

Ce qui est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -2c & = & b \\ 2d & = & 2a + b \\ -a + c & = & -d \\ -b & = & 2c \end{array} \right. .$$

Après résolution, ceci est équivalent à $a = c + d, b = -2c$. On en déduit que l'ensemble des matrices solutions est égal à

$$\boxed{\left\{ \begin{pmatrix} c + d & -2c \\ c & d \end{pmatrix}, (c, d) \in \mathbb{C}^2 \right\}}.$$