Corrigé du DS n° 5 de mathématiques et d'informatique

Problème A - Géométrie

*Dans tout ce problème, on se place dans un plan affine $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour tout cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon R, on appelle **puissance** d'un point M par rapport à $\mathscr{C}$ le réel :*

$$p(M) = CM^2 - R^2.$$

*De plus, si $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont deux cercles non concentriques dont les puissances respectives sont notées p_1 et p_2, on appelle **axe radical** de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ l'ensemble :*

$$\Delta_{1,2} = \Big\{M \in \mathscr{P} \mid p_1(M) = p_2(M)\Big\}.$$

Ce problème propose d'étudier quelques propriétés de ces deux notions. Les quatre parties sont indépendantes. Les questions des parties II et III peuvent être traitées sans l'aide de coordonnées. Cependant, il n'est pas interdit d'en introduire (c'est même conseillé si on ne sait pas faire autrement). On indiquera alors précisément les notations utilisées.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère trois exemples de cercles : le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre $C_1(2,2)$ et de rayon $R_1 = 3$, le cercle $\mathscr{C}_2$ de diamètre $[D_2D_2']$ dont les extrémités ont pour coordonnées $D_2(-2,-1)$ et $D_2'(2,-1)$, et le cercle $\mathscr{C}_3$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$. On note respectivement p_1, p_2 et p_3 les puissances par rapport à $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$. Enfin, on note $\Delta_{1,2}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, $\Delta_{1,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$, et $\Delta_{2,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

1. *Calculer la puissance du point $M(1,1)$ par rapport à $\mathscr{C}_1$.*

   ► On a :
   $$p_1(M) = C_1M^2 - R_1^2 = \left\|\overrightarrow{C_1M}\right\|^2 - 3^2 = (1-2)^2 + (1-2)^2 - 9 = \boxed{-7}.$$

2. (a) *Déterminer les coordonnées du centre C_2 et le rayon R_2 de $\mathscr{C}_2$. De même pour $\mathscr{C}_3$.*

   ► Le centre C_2 de $\mathscr{C}_2$ est le milieu du diamètre $[D_2D_2']$. Ses coordonnées sont donc égales à la moyenne des coordonnées de D_2 et D_2'. D'où :
   $$\boxed{C_2\left(\frac{-2+2}{2} = 0, \frac{-1+(-1)}{2} = -1\right)}.$$
   Le rayon R_2 de $\mathscr{C}_2$ est égal à la moitié du diamètre, donc :
   $$R_2 = \frac{1}{2}D_2D_2' = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{D_2D_2'}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{(2-(-2))^2 + (-1-(-1))^2} = \boxed{2}.$$
   L'équation cartésienne de $\mathscr{C}_3$ peut s'écrire sous la forme :
   $$\begin{aligned} & x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0 \\ \iff & (x^2 + 6x) + (y^2 - 2y) = -9 \\ \iff & (x+3)^2 - 9 + (y-1)^2 - 1 = -9 \\ \iff & (x+3)^2 + (y-1)^2 = 1^2. \end{aligned}$$
   On reconnaît donc le cercle de centre $\boxed{C_3(-3,1)}$ et de rayon $\boxed{R_3 = 1}$.

(b) *En déduire les valeurs de $p_2(M)$ et $p_3(M)$ où M est le point de coordonnées $M(1,1)$.*

▶ On a d'après les résultats de la question précédente :

$$p_2(M) = C_2M^2 - R_2^2 = \left\|\overrightarrow{C_2M}\right\|^2 - 2^2 = (1-0)^2 + (1-(-1))^2 - 4 = \boxed{1}$$

$$\text{et} \quad p_3(M) = C_3M^2 - R_3^2 = \left\|\overrightarrow{C_3M}\right\|^2 - 1^2 = (1-(-3))^2 + (1-1)^2 - 1 = \boxed{15}.$$

3. (a) *Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}_1$. De même pour $\mathscr{C}_2$.*

▶ On a :

$$\mathscr{C}_1 : (x-2)^2 + (y-2)^2 = 3^2 \iff \boxed{x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0}.$$

Et d'après les résultats de la question 2(a), on obtient :

$$\mathscr{C}_2 : (x-0)^2 + (y-(-1))^2 = 2^2 \iff \boxed{x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0}.$$

(b) *En déduire qu'une équation cartésienne de $\Delta_{1,2}$ est $2x + 3y - 1 = 0$.*

▶ Par définition de l'axe radical, un point $M(x,y)$ appartient à $\Delta_{1,2}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
p_1(M) = p_2(M) &\iff C_1M^2 - R_1^2 = C_2M^2 - R_2 \\
&\iff \left\|\overrightarrow{C_1M}\right\|^2 - 3^2 = \left\|\overrightarrow{C_2M}\right\|^2 - 2^2 \\
&\iff (x-2)^2 + (y-2)^2 - 9 = (x-0)^2 + (y-(-1))^2 - 4 \\
&\iff x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = x^2 + y^2 + 2y - 3 \\
&\iff -4x + (-4-2)y + (-1+3) = 0 \\
&\iff -4x - 6y + 2 = 0 \\
&\iff \boxed{2x + 3y - 1 = 0}.
\end{aligned}$$

4. (a) *Montrer que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ s'intersectent en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées.*

▶ D'après les résultats de la question 3(a), un point $M(x,y)$ appartient à $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_2$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0 & (E_1) \\ x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 & (E_2) \end{cases}$$

Attention, ce n'est pas un système linéaire ! Évoquer la méthode du pivot de Gauss pour sa résolution est donc incorrect.

L'opération $(E_1) - (E_2)$ donne :

$$-4x - 6y + 2 = 0 \iff x = -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}. \qquad (E)$$

En reportant dans l'équation (E_2), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 + 2y - 3 = 0 &\iff \left(\frac{9}{4} + 1\right)y^2 + \left(-\frac{3}{2}y + 2\right) + \left(\frac{1}{4} - 3\right) = 0 \\
&\iff 13y^2 + 2y - 11 = 0.
\end{aligned}$$

On obtient une équation du second degré qui admet -1 comme racine évidente. On peut donc factoriser le polynôme du second degré par $(y-(-1)) = (y+1)$:

$$\begin{aligned}
13y^2 + 2y - 11 = 0 &\iff (y+1)(13y-11) = 0 \\
&\iff y = -1 \quad \text{ou} \quad y = \frac{11}{13}.
\end{aligned}$$

Pensez à utiliser les racines évidentes pour aller plus vite qu'un calcul de discriminant. Ici, on obtiendrait : $\Delta = 2^2 - 4 \times 13 \times (-11) = 576 = 24^2$.

En reportant ces solutions dans l'équation (E), on obtient :

$$x = -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2} = \begin{cases} \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2 \text{ si } y = -1 \\ -\frac{33}{26} + \frac{13}{26} = -\frac{10}{13} \text{ si } y = \frac{11}{13}. \end{cases}$$

Finalement, on a bien montré que $\boxed{\mathscr{C}_1 \text{ et } \mathscr{C}_2 \text{ s'intersectent en deux points}}$ qui ont pour coordonnées $\boxed{A(2,-1)}$ et $\boxed{B(-\frac{10}{13}, \frac{11}{13})}$.

(b) *Montrer que $\Delta_{1,2}$ passe par A et B.*

▶ On a :

$$2 \times 2 + 3 \times (-1) - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2 \times \left(-\frac{10}{13}\right) + 3 \times \frac{11}{13} - 1 = 0.$$

D'après les résultats des deux questions précédentes, on en déduit que $\boxed{A \in \Delta_{1,2}}$ et $\boxed{B \in \Delta_{1,2}}$.

5. (a) *Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$ s'intersectent-ils ?*

▶ On raisonne comme à la question 4(a) : un point $M(x,y)$ appartient à $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_3$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = 0 & (E_1) \\ x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0 & (E_3) \end{cases}$$

L'opération $(E_3) - (E_1)$ donne :

$$10x + 2y + 10 = 0 \iff y = -5x - 5. \qquad (E')$$

En reportant dans l'équation (E_1), on obtient :

$$\begin{aligned} & x^2 + \big(-5x-5\big)^2 - 4x - 4\big(-5x-5\big) - 1 = 0 \\ \iff & \big(1+25\big)x^2 + \big(50 - 4 + 20\big)x + \big(25 + 20 - 1\big) = 0 \\ \iff & 26x^2 + 66x + 44 = 0 \\ \iff & 13x^2 + 33x + 22 = 0. \end{aligned}$$

On obtient une équation du second degré de discriminant :

$$\Delta' = 33^2 - 4 \times 13 \times 22 = 1089 - 1144 = -55 < 0.$$

Cette équation n'admet donc pas de solutions. On en déduit que $\mathscr{C}_1 \cap \mathscr{C}_3 = \emptyset$, autrement dit $\boxed{\mathscr{C}_1 \text{ et } \mathscr{C}_3 \text{ ne s'intersectent pas}}$.

(b) *Déterminer une équation cartésienne de $\Delta_{1,3}$.*

▶ On raisonne comme à la question 3(b) : un point $M(x,y)$ appartient à $\Delta_{1,3}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned} p_1(M) = p_3(M) & \iff C_1M^2 - R_1^2 = C_3M^2 - R_3 \\ & \iff \left\|\overrightarrow{C_1M}\right\|^2 - 3^2 = \left\|\overrightarrow{C_3M}\right\|^2 - 1^2 \\ & \iff (x-2)^2 + (y-2)^2 - 9 = (x-(-3))^2 + (y-1)^2 - 1 \\ & \iff x^2 + y^2 - 4x - 4y - 1 = x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 \\ & \iff (-4-6)x + (-4+2)y + (-1-9) = 0 \\ & \iff -10x - 2y - 10 = 0 \\ & \iff \boxed{5x + y + 5 = 0}. \end{aligned}$$

6. (a) *Montrer que $\Delta_{1,2}$ et $\Delta_{1,3}$ se coupent au point de coordonnées $\Gamma(-\frac{16}{13}, \frac{15}{13})$.*

▶ D'après les résultats des questions 3(b) et 5(b), un point $M(x, y)$ appartient à $\Delta_{1,2} \cap \Delta_{1,3}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ 5x + y + 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

Ayez le réflexe d'écrire les systèmes linéaires sous forme matricielle pour aller plus vite dans leur résolution. En particulier pour les systèmes de deux équations à deux inconnues pour lesquels on peut utiliser le déterminant.

On a :

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = 2 \times 1 - 5 \times 3 = -13 \neq 0.$$

Donc le système linéaire admet une unique solution :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{-13} \begin{pmatrix} 16 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{13} \\ \frac{15}{13} \end{pmatrix}.$$

On en déduit que $\boxed{\Delta_{1,2} \text{ et } \Delta_{1,3} \text{ se coupent en un point}}$ qui a pour coordonnées $\boxed{\Gamma(-\frac{16}{13}, \frac{15}{13})}$.

(b) *Démontrer que les axes radicaux $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ sont concourants.*

▶ On a d'après le résultat de la question précédente :

$$\begin{aligned} p_2(\Gamma) &= C_2\Gamma^2 - R_2^2 = \left\|\overrightarrow{C_2\Gamma}\right\|^2 - 2^2 = \left(-\frac{16}{13} - 0\right)^2 + \left(\frac{15}{13} - (-1)\right)^2 - 4 \\ &= \frac{16^2 + 28^2 - 4 \times 13^2}{13^2} = \frac{256 + 784 - 676}{169} = \frac{364}{169} \\ \text{et} \quad p_3(\Gamma) &= C_3\Gamma^2 - R_3^2 = \left\|\overrightarrow{C_3\Gamma}\right\|^2 - 1^2 = \left(-\frac{16}{13} - (-3)\right)^2 + \left(\frac{15}{13} - 1\right)^2 - 1 \\ &= \frac{23^2 + 2^2 - 13^2}{13^2} = \frac{529 + 4 - 169}{169} = \frac{364}{169}. \end{aligned}$$

Puisque $p_2(\Gamma) = p_3(\Gamma)$, on en déduit que $\Gamma \in \Delta_{2,3}$ par définition de l'axe radical. Par conséquent, $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ se coupent au point Γ, autrement dit $\boxed{\text{les axes radicaux } \Delta_{1,2}, \Delta_{1,3} \text{ et } \Delta_{2,3} \text{ sont concourants}}$.

Il est inutile de calculer $p_2(\Gamma)$ (qui est aussi égale à $\frac{364}{169}$ par définition de $\Delta_{1,2}$ et $\Delta_{1,3}$). Par contre, une autre méthode possible consiste à déterminer une équation cartésienne de $\Delta_{2,3}$ en raisonnant comme aux questions 4(b) et 5(b), on obtient par exemple $3x - 2y + 6 = 0$, puis à remarquer que les coordonnées de Γ vérifient bien cette équation.

Partie II - Calcul de la puissance d'un point par rapport à un cercle

Dans cette partie, on fixe un cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon R. Pour tout point M, on note $p(M)$ la puissance de M par rapport à $\mathscr{C}$.

7. *Que vaut $p(M)$ si M est un point appartenant à $\mathscr{C}$?*

▶ Si M appartient à $\mathscr{C}$ alors $CM = R$ et donc $p(M) = CM^2 - R^2 = \boxed{0}$.

8. *Dans cette question, on considère un point M n'appartenant pas à $\mathscr{C}$ et une droite $\mathscr{D}$ issue de M qui intersecte $\mathscr{C}$ en deux points A et B distincts. On note A' le point diamétralement opposé à A.*

(a) *Montrer que $p(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} &= \left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}\right).\left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA'}\right) \quad \text{d'après la relation de Chasles}\\
&= \left(\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CA}\right).\left(\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{CA}\right) \quad \text{car } C \text{ est le milieu de } [AA']\\
&= \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MC}+\underbrace{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{CA}}_{=0}-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CA} \quad \text{par bilinéarité du produit scalaire}\\
&= \left\|\overrightarrow{MC}\right\|^2-\left\|\overrightarrow{CA}\right\|^2 \quad \text{par symétrie du produit scalaire et par définition de la norme}\\
&= CM^2-R^2 \quad \text{car } [CA] \text{ est un rayon de } \mathscr{C}\\
&= p(M).
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{p(M)=\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}}$.

(b) *Justifier que $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA'}$ sont orthogonaux et en déduire que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA'}=0$.*

▶ En raisonnant comme à la question précédente en remplaçant M par B, on obtient que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA'}=p(B)$. Or $p(B)=0$ d'après le résultat de la question 7 puisque $B\in\mathscr{C}$. On en déduit que $\boxed{\overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{BA'} \text{ sont orthogonaux}}$. De plus, $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires puisque M, A et B sont alignés sur la droite $\mathscr{D}$. Donc $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{BA'}$ sont aussi orthogonaux, d'où $\boxed{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA'}=0}$.

Géométriquement, $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA'}$ sont orthogonaux car B appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[AA']$, donc le triangle ABA' est rectangle en B.

(c) *Déduire des résultats précédents que $p(M)=MA\times MB$ si M est à l'extérieur du disque délimité par $\mathscr{C}$ et $p(M)=-MA\times MB$ sinon.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
p(M) &= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'} \quad \text{d'après le résultat de la question 8(c)}\\
&= \overrightarrow{MA}.\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA'}\right) \quad \text{d'après la relation de Chasles}\\
&= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}+\underbrace{\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA'}}_{=0} \quad \text{par bilinéarité du produit scalaire}\\
&= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} \quad \text{d'après le résultat de la question précédente.}
\end{aligned}$$

De plus, $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MA}$ sont colinéaires puisque M, A et B sont alignés sur la droite $\mathscr{D}$. Par conséquent, le produit sclaire $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ est égal à $-MA\times MB$ si $M\in[AB]$ (donc si M est à l'intérieur du disque délimité par $\mathscr{C}$) et à $MA\times MB$ sinon. On en déduit que :

$$\boxed{p(M)=\begin{cases} MA\times MB \text{ si } M \text{ est à l'extérieur du disque délimité par } \mathscr{C}\\ -MA\times MB \text{ sinon.}\end{cases}}$$

Partie III - Construction de l'axe radical

Dans cette partie, on fixe deux cercles non concentriques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de centres respectifs $C_1\neq C_2$ et de rayons respectifs R_1 et R_2. Pour tout point M, on note respectivement $p_1(M)$ et $p_2(M)$ les puissances de M par rapport à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Enfin, on note $\Delta_{1,2}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

9. *On note I le milieu du segment $[C_1C_2]$ et on fixe $M\in\mathscr{P}$.*

(a) *Montrer que $M\in\Delta_{1,2}$ si et seulement si $\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IM}=(R_1^2-R_2^2)/2$.*

▶ On a :

$$\begin{aligned}
M \in \Delta_{1,2} &\iff p_1(M) = p_2(M) \quad \text{par définition de l'axe radical}\\
&\iff C_1M^2 - R_1^2 = C_2M^2 - R_2^2 \quad \text{par définition de la puissance}\\
&\iff \left\|\overrightarrow{C_1M}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{C_2M}\right\|^2 = R_1^2 - R_2^2\\
&\iff \left\|\overrightarrow{C_1I} + \overrightarrow{IM}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{C_2I} + \overrightarrow{IM}\right\|^2 = R_1^2 - R_2^2 \quad \text{d'après la relation de Chasles}\\
&\iff \left\|\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{IM}\right\|^2 - \left\|-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{IM}\right\|^2 = R_1^2 - R_2^2 \quad \text{car } I \text{ est le milieu de } [C_1C_2]\\
&\iff \left(\left\|\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_2}\right\|^2 + 2\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IM} + \left\|\overrightarrow{IM}\right\|^2\right) - \left(\left\|-\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_2}\right\|^2 - 2\tfrac{1}{2}\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IM} + \left\|\overrightarrow{IM}\right\|^2\right)\\
&\qquad\qquad = R_1^2 - R_2^2 \quad \text{par propriété de la norme}\\
&\iff 2\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IM} = R_1^2 - R_2^2 \quad \text{après simplifications}\\
&\iff \boxed{\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IM} = (R_1^2 - R_2^2)/2}.
\end{aligned}$$

(b) *Trouver deux réels μ_1 et μ_2 tels que le barycentre G de (C_1, μ_1) et (C_2, μ_2) appartienne à $\Delta_{1,2}$. On choisira les poids μ_1 et μ_2 afin que $\mu_1 + \mu_2 = 2C_1C_2^2$ et on les exprimera en fonction de $p_1(C_2)$, $p_2(C_1)$, R_1 et R_2.*

▶ On raisonne par analyse-synthèse.

Analyse. On cherche $(\mu_1, \mu_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $G = \text{bar}\left((C_1, \mu_1), (C_2, \mu_2)\right) \in \Delta_{1,2}$ et $\mu_1 + \mu_2 = 2C_1C_2^2$. Puisque $G \in \Delta_{1,2}$, on a d'après le résultat de la question précédente appliqué à $M = G$:

$$\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IG} = (R_1^2 - R_2^2)/2.$$

Or on a :

$$\begin{aligned}
(\mu_1 + \mu_2)\overrightarrow{IG} &= \mu_1\overrightarrow{IC_1} + \mu_2\overrightarrow{IC_2} \quad \text{par définition du barycentre}\\
&= -\tfrac{\mu_1}{2}\overrightarrow{C_1C_2} + \tfrac{\mu_2}{2}\overrightarrow{C_1C_2} \quad \text{car } I \text{ est le milieu de } [C_1C_2]\\
&= \frac{-\mu_1 + \mu_2}{2}\overrightarrow{C_1C_2}.
\end{aligned}$$

En réinjectant dans la première égalité, on obtient que :

$$(R_1^2 - R_2^2)/2 = \overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{C_1C_2}.\left(\frac{-\mu_1 + \mu_2}{2(\mu_1 + \mu_2)}\overrightarrow{C_1C_2}\right) = \frac{-\mu_1 + \mu_2}{2(\mu_1 + \mu_2)}\left\|\overrightarrow{C_1C_2}\right\|^2.$$

Puisque $\mu_1 + \mu_2 = 2C_1C_2^2$, on en déduit que :

$$(R_1^2 - R_2^2)/2 = \frac{-\mu_1 + \mu_2}{4C_1C_2^2}C_1C_2^2 \iff -\mu_1 + \mu_2 = 2(R_1^2 - R_2^2).$$

Par conséquent, on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 2C_1C_2^2 \\ -\mu_1 + \mu_2 = 2(R_1^2 - R_2^2) \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1C_2^2 \\ 2(R_1^2 - R_2^2) \end{pmatrix}.$$

Ayez le réflexe d'écrire les systèmes linéaires sous forme matricielle pour aller plus vite dans leur résolution. En particulier pour les systèmes de deux équations à deux inconnues pour lesquels on peut utiliser le déterminant.

On a :

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \times 1 - (-1) \times 1 = 2 \neq 0.$$

Donc le système linéaire admet une unique solution :

$$\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2C_1C_2^2\\ 2(R_1^2-R_2^2)\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2C_1C_2^2\\ 2(R_1^2-R_2^2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_1C_2^2-R_1^2+R_2^2\\ C_1C_2^2+R_1^2-R_2^2\end{pmatrix}.$$

<u>Synthèse</u>. On pose :

$$\boxed{\mu_1=p_1(C_2)+R_2^2}\quad\text{et}\quad\boxed{\mu_2=p_2(C_1)+R_1^2}.$$

Puisque $p_1(C_2)=C_1C_2^2-R_1^2$ et $p_2(C_1)=C_2C_1^2-R_2^2$ par définition de la puissance, on obtient bien que $G=\text{bar}\left((C_1,\mu_1),(C_2,\mu_2)\right)\in\Delta_{1,2}$ et $\mu_1+\mu_2=2C_1C_2^2$ d'après les calculs de l'analyse.

(c) En déduire que $\Delta_{1,2}$ est une droite dont on précisera un point et un vecteur normal.

▶ Puisque $G\in\Delta_{1,2}$ d'après le résultat de la question précédente, on a d'après le résultat de la question 9(a) appliqué à $M=G$:

$$\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IG}=(R_1^2-R_2^2)/2.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}M\in\Delta_{1,2}&\iff \overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IM}=(R_1^2-R_2^2)/2\quad\text{d'après le résultat de la question 9(a)}\\&\iff \overrightarrow{C_1C_2}.\left(\overrightarrow{IG}+\overrightarrow{GM}\right)=(R_1^2-R_2^2)/2\quad\text{d'après la relation de Chasles}\\&\iff \underbrace{\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IG}}_{=(R_1^2-R_2^2)/2}+\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{GM}=(R_1^2-R_2^2)/2\\&\iff \overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{GM}=0.\end{aligned}$$

Par conséquent, M appartient à $\Delta_{1,2}$ si et seulement si $\overrightarrow{GM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{C_1C_2}$. On reconnaît une $\boxed{\text{droite passant par } G \text{ et de vecteur normal } \overrightarrow{C_1C_2}}$.

10. Déterminer $\Delta_{1,2}$ dans le cas où $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ s'intersectent en deux points A et B distincts.

▶ On a $p_1(A)=0=p_2(A)$ puisque A appartient à $\mathscr{C}_1$ et à $\mathscr{C}_2$ (d'après le résultat de la question 7). Donc $A\in\Delta_{1,2}$ par définition de l'axe radical. De même, $B\in\Delta_{1,2}$ puisque $B\in\mathscr{C}_1\cap\mathscr{C}_2$. Or $\Delta_{1,2}$ est une droite d'après le résultat de la question précédente. On en déduit que $\boxed{\Delta_{1,2}\text{ est la droite }(AB)\text{ passant par }A\text{ et }B}$.

11. On note $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ les deux tangentes communes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. On note respectivement T_1 et T_2 les points de tangence de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. De plus, on note J le milieu du segment $[T_1T_2]$.

(a) Justifier que $J\in\Delta_{1,2}$.

▶ On a :

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{IJ}&=\overrightarrow{IT_1}+\overrightarrow{IT_2}\quad\text{car } J=\text{bar}((T_1,1),(T_2,1))\\&=\overrightarrow{IC_1}+\overrightarrow{C_1T_1}+\overrightarrow{IC_2}+\overrightarrow{C_2T_2}\quad\text{d'après la relation de Chasles}\\&=\overrightarrow{C_1T_1}+\underbrace{\overrightarrow{IC_1}+\overrightarrow{IC_2}}_{=2\overrightarrow{II}=\vec{0}}+\overrightarrow{C_2T_2}\\&=\overrightarrow{C_1T_1}+\overrightarrow{C_2T_2}\quad\text{car } I=\text{bar}((C_1,1),(C_2,1)).\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{C_1T_1}+\overrightarrow{T_1T_2}+\overrightarrow{T_2C_2}\right).\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{C_1T_1}+\overrightarrow{C_2T_2}\right)\quad\text{d'après la relation de Chasles}$$

$$=\tfrac{1}{2}\left(\underbrace{\overrightarrow{C_1T_1}.\overrightarrow{C_1T_1}}_{=\left\|\overrightarrow{C_1T_1}\right\|^2=R_1^2}+\overrightarrow{C_1T_1}.\overrightarrow{C_2T_2}+\underbrace{\overrightarrow{T_1T_2}.\overrightarrow{C_1T_1}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{T_1T_2}.\overrightarrow{C_2T_2}}_{=0}+\underbrace{\overrightarrow{T_2C_2}.\overrightarrow{C_1T_1}}_{=-\overrightarrow{C_1T_1}.\overrightarrow{C_2T_2}}+\underbrace{\overrightarrow{T_2C_2}.\overrightarrow{C_2T_2}}_{-\left\|\overrightarrow{C_2T_2}\right\|^2=-R_2^2}\right).$$

Faites un petit schéma au brouillon pour savoir comment mener les calculs afin de les simplifier (en reconnaissant des vecteurs orthogonaux et des rayons de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$).

Puisque la droite $\mathscr{D} = (T_1T_2)$ est tangente à $\mathscr{C}_1$ en T_1, les vecteurs $\overrightarrow{T_1T_2}$ et $\overrightarrow{C_1T_1}$ sont orthogonaux, donc $\overrightarrow{T_1T_2}.\overrightarrow{C_1T_1} = 0$. De même, on a $\overrightarrow{T_1T_2}.\overrightarrow{C_2T_2} = 0$. Finalement, on obtient que :

$$\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(R_1^2 + 0 - R_2^2\right) = \left(R_1^2 - R_2^2\right)/2.$$

On en déduit que $\boxed{J \in \Delta_{1,2}}$ d'après le résultat de la question 9(a).

Une autre méthode consiste à utiliser la définition de l'axe radical en calculant la puissance de J par rapport à $\mathscr{C}_1$ et à $\mathscr{C}_2$. On a :

$$p_1(J) = C_1J^2 - R_1^2 = C_1J^2 - C_1T_1^2 = T_1J^2$$

d'après le théorème de Pythagore, car le triangle C_1T_1J est rectangle en T_1. Puisque J est le milieu de $[T_1T_2]$, on en déduit que $p_1(J) = \frac{1}{4}T_1T_2^2$. De même, on obtient que $p_2(J) = T_2J^2 = \frac{1}{4}T_1T_2^2 = p_1(J)$. Par conséquent, $J \in \Delta_{1,2}$.

(b) *En déduire une manière de construire l'axe radical $\Delta_{1,2}$.*

▶ En raisonnant comme à la question précédente, on obtient que $J' \in \Delta_{1,2}$ où J' est le milieu du segment $[T_1'T_2']$ reliant les points de tangence T_1 et T_2 de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ respectivement. Or $\Delta_{1,2}$ est une droite d'après le résultat de la question 9(b). On en déduit que $\boxed{\Delta_{1,2} \text{ est la droite } (JJ') \text{ passant par } J \text{ et } J'}$.

Partie IV - Centre radical

Dans cette partie, on fixe trois cercles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ de centres respectifs C_1, C_2 et C_3 et de rayons respectifs R_1, R_2 et R_3. On suppose que les trois centres ne sont pas alignés et on note $C_1(a_1, b_1)$, $C_2(a_2, b_2)$ et $C_3(a_3, b_3)$ leurs coordonnées. Enfin, on note $\Delta_{1,2}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, $\Delta_{1,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$, et $\Delta_{2,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

12. (a) *Montrer qu'une équation cartésienne de $\Delta_{1,2}$ est :*

$$\Delta_{1,2} : (a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + K_{1,2} = 0$$

où $K_{1,2} = (a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_2^2 - b_2^2 + R_2^2)/2$.

▶ Par définition de l'axe radical, un point $M(x, y)$ appartient à $\Delta_{1,2}$ si et seulement si :

$$\begin{aligned}
& p_1(M) = p_2(M) \\
\iff & C_1M - R_1^2 = C_2M - R_2^2 \\
\iff & \left\|\overrightarrow{C_1M}\right\|^2 - R_1^2 - \left\|\overrightarrow{C_2M}\right\|^2 + R_2^2 = 0 \\
\iff & (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - R_1^2 - (x - a_2)^2 - (y - b_2)^2 + R_2^2 = 0 \\
\iff & x^2 - 2a_1x + a_1^2 + y^2 - 2b_1y + b_1^2 - R_1^2 - x^2 + 2a_2x - a_2^2 - y^2 + 2b_2y - b_2^2 + R_2^2 = 0 \\
\iff & 2(a_2 - a_1)x + 2(b_2 - b_1)y + \underbrace{\left(a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_2^2 - b_2^2 + R_2^2\right)}_{=2K_{1,2}} = 0 \\
\iff & \boxed{(a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + K_{1,2} = 0} \quad \text{où} \quad \boxed{K_{1,2} = (a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_2^2 - b_2^2 + R_2^2)/2}.
\end{aligned}$$

(b) *Montrer qu'étudier l'intersection de $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ revient à résoudre un système linéaire (S) de trois équations à deux inconnues. On écrira ce système sous forme matricielle.*

▶ En raisonnant comme à la question précédente, on obtient des équations cartésiennes de $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ de la forme :

$$\Delta_{1,3} : (a_3 - a_1)x + (b_3 - b_1)y + K_{1,3} = 0 \quad \text{où} \quad K_{1,3} = (a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_3^2 - b_3^2 + R_3^2)/2,$$

$$\Delta_{2,3} : (a_3 - a_2)x + (b_3 - b_2)y + K_{2,3} = 0 \quad \text{où} \quad K_{2,3} = (a_2^2 + b_2^2 - R_2^2 - a_3^2 - b_3^2 + R_3^2)/2.$$

Par conséquent, un point $M(x, y)$ appartient à $\Delta_{1,2} \cap \Delta_{1,3} \cap \Delta_{2,3}$ si et seulement si :

$$\begin{cases} (a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + K_{1,2} = 0 \\ (a_3 - a_1)x + (b_3 - b_1)y + K_{1,3} = 0 \\ (a_3 - a_2)x + (b_3 - b_2)y + K_{2,3} = 0 \end{cases}$$

$$\iff \boxed{\begin{pmatrix} (a_2 - a_1) & (b_2 - b_1) \\ (a_3 - a_1) & (b_3 - b_1) \\ (a_3 - a_2) & (b_3 - b_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{1,2} \\ -K_{1,3} \\ -K_{2,3} \end{pmatrix}}. \tag{S}$$

(c) Justifier que le système linéaire (S) obtenu à la question précédente est équivalent au système linéaire (S') formé des deux premières équations de (S).

▶ On utilise les opérations élémentaires sur les lignes suivantes :

$$\begin{aligned}
(S) \iff & \begin{pmatrix} (a_2 - a_1) & (b_2 - b_1) \\ (a_3 - a_1) & (b_3 - b_1) \\ (a_3 - a_2) & (b_3 - b_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{1,2} \\ -K_{1,3} \\ -K_{2,3} \end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\
\iff & \begin{pmatrix} (a_2 - a_1) & (b_2 - b_1) \\ (a_3 - a_1) & (b_3 - b_1) \\ (a_1 - a_2) & (b_1 - b_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{1,2} \\ -K_{1,3} \\ -K_{2,3} + K_{1,3} \end{pmatrix} \; L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\
\iff & \begin{pmatrix} (a_2 - a_1) & (b_2 - b_1) \\ (a_3 - a_1) & (b_3 - b_1) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{1,2} \\ -K_{1,3} \\ -K_{2,3} + K_{1,3} - K_{1,2} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Or :

$$\begin{aligned}
& - K_{2,3} + K_{1,3} + K_{1,2} \\
=& -\tfrac{1}{2}\left(a_2^2 + b_2^2 - R_2^2 - a_3^2 - b_3^2 + R_3^2\right) + \tfrac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_3^2 - b_3^2 + R_3^2\right) \\
& \qquad - \tfrac{1}{2}\left(a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_2^2 - b_2^2 + R_2^2\right) \\
=& \tfrac{1}{2}\left(-a_2^2 - b_2^2 + R_2^2 + a_3^2 + b_3^2 - R_3^2 + a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_3^2 - b_3^2 + R_3^2\right. \\
& \qquad \left. -a_1^2 - b_1^2 + R_1^2 + a_2^2 + b_2^2 - R_2^2\right) \\
=& 0.
\end{aligned}$$

Ainsi, la troisième équation du système équivalent à (S) peut s'écrire «$0 = 0$». Par conséquent, le système linéaire (S) est bien équivalent au système :

$$\boxed{\begin{pmatrix} (a_2 - a_1) & (b_2 - b_1) \\ (a_3 - a_1) & (b_3 - b_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K_{1,2} \\ -K_{1,3} \end{pmatrix}}. \tag{S'}$$

(d) Conclure que les axes radicaux $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ sont concourants. Les coordonnées du point de concourance ne sont pas demandées.

▶ Puisque C_1, C_2 et C_3 ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{C_1C_2}$ et $\overrightarrow{C_1C_3}$ ne sont pas colinéaires. Par définition de la colinéarité, on en déduit que le système linéaire $\lambda\overrightarrow{C_1C_2} + \mu\overrightarrow{C_1C_3} = \overrightarrow{0}$ admet pour unique solution $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. Or la forme matricielle de ce système linéaire est :

$$\lambda\overrightarrow{C_1C_2} + \mu\overrightarrow{C_1C_3} = \overrightarrow{0} \iff \begin{pmatrix} (a_2 - a_1) & (a_3 - a_1) \\ (b_2 - b_1) & (b_3 - b_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Puisque ce système admet une unique solution, le déterminant de la matrice de ses coefficients est non nul :

$$\det\begin{pmatrix} (a_2-a_1) & (a_3-a_1) \\ (b_2-b_1) & (b_3-b_1) \end{pmatrix} = (a_2-a_1)(b_3-b_1)-(b_2-b_1)(a_3-a_1) \neq 0.$$

Or, on remarque que ce déterminant est égal à celui de la matrice des coefficients du système (S') obtenu à la question précédente :

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix} (a_2-a_1) & (b_2-b_1) \\ (a_3-a_1) & (b_3-b_1) \end{pmatrix} &= (a_2-a_1)(b_3-b_1)-(a_3-a_1)(b_2-b_1) \\ &= (a_2-a_1)(b_3-b_1)-(b_2-b_1)(a_3-a_1) \neq 0.\end{aligned}$$

On en déduit que le système (S') admet une unique solution, donc que le système (S) admet aussi une unique solution d'après le résultat de la question précédente. Finalement, on conclut que $\boxed{\text{les axes radicaux } \Delta_{1,2},\ \Delta_{1,3} \text{ et } \Delta_{2,3} \text{ sont concourants}}$ d'après le résultat de la question 12(b).

Le point de concourance des trois axes radicaux est appelé le ***centre radical*** *de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.*