DS n° 5 de mathématiques et d'informatique

durée : 3 heures

L'usage de la calculatrice ou de documents est interdit.
Il est recommandé de lire l'ensemble de l'énoncé attentivement et patiemment.
Si vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur votre copie et poursuivez votre composition en mentionnant les hypothèses que vous avez été amené à formuler.
Le soin de la présentation, la qualité de la rédaction, ainsi que la rigueur, la clarté et la concision des raisonnements constitueront un facteur important d'appréciation de la copie.

Problème A - Géométrie

Dans tout ce problème, on se place dans un plan affine $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. Pour tout cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon R, on appelle **puissance** d'un point M par rapport à $\mathscr{C}$ le réel :

$$p(M) = CM^2 - R^2.$$

De plus, si $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont deux cercles non concentriques dont les puissances respectives sont notées p_1 et p_2, on appelle **axe radical** de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ l'ensemble :

$$\Delta_{1,2} = \Big\{M \in \mathscr{P} \mid p_1(M) = p_2(M)\Big\}.$$

Ce problème propose d'étudier quelques propriétés de ces deux notions. Les quatre parties sont indépendantes. Les questions des parties II et III peuvent être traitées sans l'aide de coordonnées. Cependant, il n'est pas interdit d'en introduire (c'est même conseillé si on ne sait pas faire autrement). On indiquera alors précisément les notations utilisées.

Partie I - Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère trois exemples de cercles : le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre $C_1(2,2)$ et de rayon $R_1 = 3$, le cercle $\mathscr{C}_2$ de diamètre $[D_2D_2']$ dont les extrémités ont pour coordonnées $D_2(-2,-1)$ et $D_2'(2,-1)$, et le cercle $\mathscr{C}_3$ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 9 = 0$. On note respectivement p_1, p_2 et p_3 les puissances par rapport à $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$. Enfin, on note $\Delta_{1,2}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, $\Delta_{1,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$, et $\Delta_{2,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

1. Calculer la puissance du point $M(1,1)$ par rapport à $\mathscr{C}_1$.
2. (a) Déterminer les coordonnées du centre C_2 et le rayon R_2 de $\mathscr{C}_2$. De même pour $\mathscr{C}_3$.
   (b) En déduire les valeurs de $p_2(M)$ et $p_3(M)$ où M est le point de coordonnées $M(1,1)$.
3. (a) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{C}_1$. De même pour $\mathscr{C}_2$.
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne de $\Delta_{1,2}$ est $2x + 3y - 1 = 0$.
4. (a) Montrer que $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ s'intersectent en deux points A et B dont on déterminera les coordonnées.
   (b) Montrer que $\Delta_{1,2}$ passe par A et B.
5. (a) Les cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$ s'intersectent-ils ?
   (b) Déterminer une équation cartésienne de $\Delta_{1,3}$.
6. (a) Montrer que $\Delta_{1,2}$ et $\Delta_{1,3}$ se coupent au point de coordonnées $\Gamma(-\frac{16}{13}, \frac{15}{13})$.
   (b) Démontrer que les axes radicaux $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ sont concourants.

Partie II - Calcul de la puissance d'un point par rapport à un cercle

Dans cette partie, on fixe un cercle $\mathscr{C}$ de centre C et de rayon R. Pour tout point M, on note $p(M)$ la puissance de M par rapport à $\mathscr{C}$.

7. Que vaut $p(M)$ si M est un point appartenant à $\mathscr{C}$?
8. Dans cette question, on considère un point M n'appartenant pas à $\mathscr{C}$ et une droite $\mathscr{D}$ issue de M qui intersecte $\mathscr{C}$ en deux points A et B distincts. On note A' le point diamétralement opposé à A.
   (a) Montrer que $p(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}$.
   (b) Justifier que $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BA'}$ sont orthogonaux et en déduire que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BA'} = 0$.
   (c) Déduire des résultats précédents que $p(M) = MA \times MB$ si M est à l'extérieur du disque délimité par $\mathscr{C}$ et $p(M) = -MA \times MB$ sinon.

Partie III - Construction de l'axe radical

Dans cette partie, on fixe deux cercles non concentriques $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ de centres respectifs $C_1 \neq C_2$ et de rayons respectifs R_1 et R_2. Pour tout point M, on note respectivement $p_1(M)$ et $p_2(M)$ les puissances de M par rapport à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Enfin, on note $\Delta_{1,2}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

9. On note I le milieu du segment $[C_1C_2]$ et on fixe $M \in \mathscr{P}$.
   (a) Montrer que $M \in \Delta_{1,2}$ si et seulement si $\overrightarrow{C_1C_2}.\overrightarrow{IM} = (R_1^2 - R_2^2)/2$.
   (b) Trouver deux réels μ_1 et μ_2 tels que le barycentre G de (C_1, μ_1) et (C_2, μ_2) appartienne à $\Delta_{1,2}$. On choisira les poids μ_1 et μ_2 afin que $\mu_1 + \mu_2 = 2C_1C_2^2$ et on les exprimera en fonction de $p_1(C_2)$, $p_2(C_1)$, R_1 et R_2.
   (c) En déduire que $\Delta_{1,2}$ est une droite dont on précisera un point et un vecteur normal.
10. Déterminer $\Delta_{1,2}$ dans le cas où $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ s'intersectent en deux points A et B distincts.
11. On note $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ les deux tangentes communes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. On note respectivement T_1 et T_2 les points de tangence de $\mathscr{D}$ avec $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. De plus, on note J le milieu du segment $[T_1T_2]$.
   (a) Justifier que $J \in \Delta_{1,2}$.
   (b) En déduire une manière de construire l'axe radical $\Delta_{1,2}$.

Partie IV - Centre radical

Dans cette partie, on fixe trois cercles $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ de centres respectifs C_1, C_2 et C_3 et de rayons respectifs R_1, R_2 et R_3. On suppose que les trois centres ne sont pas alignés et on note $C_1(a_1, b_1)$, $C_2(a_2, b_2)$ et $C_3(a_3, b_3)$ leurs coordonnées. Enfin, on note $\Delta_{1,2}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, $\Delta_{1,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$, et $\Delta_{2,3}$ l'axe radical de $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.

12. (a) Montrer qu'une équation cartésienne de $\Delta_{1,2}$ est :

$$\Delta_{1,2} : (a_2 - a_1)x + (b_2 - b_1)y + K_{1,2} = 0$$

   où $K_{1,2} = (a_1^2 + b_1^2 - R_1^2 - a_2^2 - b_2^2 + R_2^2)/2$.
   (b) Montrer qu'étudier l'intersection de $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ revient à résoudre un système linéaire (S) de trois équations à deux inconnues. On écrira ce système sous forme matricielle.
   (c) Justifier que le système linéaire (S) obtenu à la question précédente est équivalent au système linéaire (S') formé des deux premières équations de (S).
   (d) Conclure que les axes radicaux $\Delta_{1,2}$, $\Delta_{1,3}$ et $\Delta_{2,3}$ sont concourants. Les coordonnées du point de concourance ne sont pas demandées.

Le point de concourance des trois axes radicaux est appelé le **centre radical** de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$.