DS 5 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

- Durée : 3 heures.
- Documents et calculatrice non autorisés.
- Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Problème B : étude de suites

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit l'équation (E_n) par : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} + \ldots + \dfrac{1}{x+n} = 1$.
L'objectif du problème est d'étudier les solutions de ces équations.
À cet effet, on introduit la fonction f_n, de la variable réelle x définie par :

$$f_n(x) \quad = \quad \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} \right) - 1.$$

1. **Étude d'un cas particulier.**
   Pour cette question seulement, on prend $n = 1$.
   (a) Donner le domaine de définition de f_1, dresser le tableau de variations de f_1.
   (b) Résoudre l'équation (E_1).

Correction

(a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $f_1(x)$ est bien définie si et seulement si $x \neq 0$ et $x \neq -1$. Donc $\boxed{D_{f_1} =]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[}$.
La fonction f_1 étant une somme de fractions rationnelles, elle est dérivable sur son domaine de définition et :

$$\forall x \in D_{f_1}, f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x+1)^2} < 0.$$

f' étant strictement négative sur D_{f_1}, on en déduit que :
- f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$,
- f est strictement décroissante sur $]-1, 0[$,
- f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

À l'aide des opérations usuelles sur les limites, on constate que

$$\begin{array}{lll} \lim_{x\to-\infty} f_1(x) = -1, & \lim_{x\to-1, x<-1} f_1(x) = -\infty, & \lim_{x\to-1, x>-1} f_1(x) = +\infty, \\ \lim_{x\to0, x<0} f_1(x) = -\infty, & \lim_{x\to0, x>0} f_1(x) = +\infty, & \lim_{x\to+\infty} f_1(x) = -1. \end{array}.$$

x	$+\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	-1 $\searrow$	$-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	-1

(b) Résolvons (E_1). Soit $x \in D_{f_1}$. Raisonnons par équivalence.

$$\begin{array}{rcl} (E_1) & \Longleftrightarrow & \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} - 1 = 0 \\ & \Longleftrightarrow & \frac{1+x+x-x(x+1)}{x(x+1)} = 0 \\ & \Longleftrightarrow & -x^2 + x + 1 = 0 \qquad (x \in D_{f_1}) \end{array}.$$

On reconnaît une équation du second degré de discriminant $1 - 4(-1) = 5 > 0$. Les solutions de cette équation sont donc exactement :

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ces deux valeurs étant bien dans D_{f_1}, on en déduit que les solutions de (E_1) sont donc exactement :

$$\boxed{S = \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}.$$

2. **Dénombrement des solutions de** (E_n)**.**
On fixe un entier naturel $n \geq 1$.
   (a) Donner le domaine de définition de la fonction f_n.
   (b) On suppose dans cette question $n = 5$. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $\mathbb{R}$. On placera également les différentes limites.
   (c) Faire de même pour f_n avec n quelconque. On donnera le tableau avec une brève justification.
   (d) En déduire que (E_n) a exactement $n+1$ solutions réelles.

Correction

(a) La fonction f_n étant une somme de fractions rationnelles, on en déduit que son domaine de définition est $\mathbb{R}$ privé des points annulant un des dénominateurs. Donc

$$\boxed{D_{f_n} = \mathbb{R} \backslash \{-n, -(n-1), \ldots, -i, \ldots, -1, 0\}}.$$

(b) La fonction f_5 étant une somme de fractions rationnelles, elle est dérivable sur son domaine de définition et :

$$\begin{array}{rcl} \forall x \in D_{f_5}, \quad f_5'(x) & = & \sum_{i=0}^{5} \left(-\frac{1}{(x+i)^2}\right) \\ & = & -\sum_{i=0}^{5} \left(\frac{1}{(x+i)^2}\right) < 0 \end{array}.$$

f_5' étant strictement négative sur D_{f_5}, on en déduit que :
- f est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, -5[$,
- pour tout $i \in \{-5, -4, -3, -2, -1\}$, f_5 est strictement décroissante sur $]-i, -i+1[$,
- f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

À l'aide des opérations usuelles sur les limites, on constate que

$$\lim_{x \to -\infty} f_5(x) = -1 \quad \lim_{x \to +\infty} f_5(x) = -1 \ .$$

De plus,

$$\forall i \in \{-5, -4, \ldots, -1, 0\}, \lim_{x \to i, x > i} f_5(x) = +\infty, \lim_{x \to i, x < i} f_5(x) = -\infty.$$

Il en vient le tableau de variations :

x	$+\infty$		-5		-4		-3		-2		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	-1

(c) De façon similaire, la fonction f_n étant une somme de fractions rationnelles, elle est dérivable sur son domaine de définition et :

$$\begin{aligned} \forall x \in D_{f_n}, \quad f_n'(x) &= \sum_{i=0}^n \left(-\frac{1}{(x+i)^2}\right) \\ &= -\sum_{i=0}^n \left(\frac{1}{(x+i)^2}\right) < 0 \end{aligned}.$$

f_n' étant strictement négative sur D_{f_n}, on en déduit que :

— f_n est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty, -n[$,

— pour tout $i \in \{-n, -(n-1), -(n-2), \dots, -2, -1\}$, f_5 est strictement décroissante sur $]-i, -i+1[$,

— f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.

À l'aide des opérations usuelles sur les limites, on constate que

$$\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = -1 \quad \lim_{x\to+\infty} f_n(x) = -1 \ .$$

De plus,

$$\forall i \in \{-n, -(n-1), \dots, -1, 0\}, \lim_{x\to i, x>i} f_n(x) = +\infty, \lim_{x\to i, x<i} f_n(x) = -\infty.$$

On obtient alors le tableau de variations

x	$+\infty$		$-n$		$-(n-1)$		$-(n-2)$		$\cdots$		$-i$		$-i+1$		$\cdots$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		$-$		$-$		$-$	$\cdots$	$-$		$-$		$-$	$\cdots$	$-$		$-$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$		$\cdots$		$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	$-\infty \,\Vert\, +\infty$		$\cdots$		$-\infty \,\Vert\, +\infty$	$\searrow$	-1

(d) D'après les variations de f_n, l'équation (E_n) n'a pas de solution sur $]-\infty, -n[$. Soit $i \in \{-n, -n+1, \dots, -1\}$. On sait que :

— f est continue sur $]i, i+1[$ (car fraction rationnelle)

— $\lim_{x\to i, x>i} f_n(x) = +\infty$, $\lim_{x\to i+1, x<i+1} f_n(x) = -\infty$

— f est strictement décroissante sur $]i, i+1[$

— $0 \in]-\infty, +\infty[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $\alpha_i \in]i, i+1[$ vérifiant $f_n(\alpha_i) = 0$

De même, sur $]0, +\infty[$, en raisonnant de façon similaire on en déduit qu'il existe un unique $\alpha_0 \in]0, +\infty[$ vérifiant $f_n(\alpha_0) = 0$. De l'étude précédente, on en déduit que les solutions de l'équation (E_n) sont exactement :

$$\alpha_0, \alpha_{-1}, \alpha_{-2}, \cdots, \alpha_{-n},$$

ce qui nous donne exactement $\boxed{n+1 \text{ solutions réelles}}$.

3. **Informatique.**

(a) Écrire une fonction Python `fonction_n(n,x)` qui prend en argument un entier naturel $n \geq 1$, un réel x dans le domaine de D_{f_n} et qui renvoie la valeur $f_n(x)$.

Dans la suite, on supposera que la fonction `fonction_n` est définie.

(b) On considère la fonction suivante :

```
def precision(n,d) :
    a = -1
    b = 0
    while (b-a)> d :
        c = (a+b)/2
        if fonction_n(n,c) > 0 :
            a = c
        else :
            b = c
   return [a,b]
```

i. Écrire la valeur de retour de l'instruction `fonction_n(2,1/4)`.

ii. Modifier le code précédent pour que la valeur de retour soit une liste $[a, b]$ vérifiant $|b-a| \leq d$ et $-2 \leq a \leq b \leq -1$.

(c) On aimerait écrire une fonction `approx_sol(n,d)` qui prend en argument un entier $n \geq 1$ et un réel strictement positif `d` et qui renvoie une liste de listes de réels L où pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ la liste $L[k]$ est de la forme $[a_k, b_k]$ avec $|b_k - a_k| \leq d$ et $k - n \leq a_k \leq b_k \leq k - n + 1$. On propose le pseudo-code pour la fonction `approx_sol` :

```
approx_sol(n,d) :
    initialiser debut à [-n,-n+1,...,-1]
    initialiser fin  à [-n,-n+1,...,0]
    ecart = 1
    tant que ecart > d:
        pour tout 0<=k<=(n-1) :
            poser c = (debut[k]+fin[k])/2
            si fonction_n(x)>0 :
                debut[k] = c
            sinon :
                fin[k] = c
   retourner [[debut[k],fin[k]] pour k parcourant {0,...,n-1}]
```

i. Traduire en Python le pseudo-code précédent.

ii. À quoi correspond la valeur de retour de `approx_sol` ?

Correction

(a) Voici la fonction `fonction_n(n,x)` :

```
def fonction_n(n,x) :
    S = -1
    for i in range(n+1) :
        S = S+ (1/(x+i))
    return S
```

(b) On considère la fonction suivante :

```
def precision(n,d) :
    a = -1
    b = 0
    while (b-a)> d :
        c = (a+b)/2
        if fonction_n(n,c) > 0 :
            a = c
        else :
            b = c
   return [a,b]
```

i. Après exécution, on trouve la valeur `[-0.75,-0.5]`

ii. Il suffit de modifier les lignes 2 et 3 du code comme suit :

```
def precision(n,d) :
    a = -2
    b =-1
    while (b-a)> d :
        c = (a+b)/2
        if fonction_n(n,c) > 0 :
            a = c
        else :
            b = c
   return [a,b]
```

(c) On aimerait écrire une fonction `approx_sol(n,d)` qui prend en argument un entier $n \geq 1$ et un réel strictement positif `d` et qui renvoie une liste de listes de réels L où pour tout $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ la liste $L[k]$ est de la forme $[a_k, b_k]$ avec $|b_k - a_k| \leq d$ et $k - n \leq a_k \leq b_k \leq k - n + 1$. On propose le pseudo-code pour la fonction `approx_sol` :

```
approx_sol(n,d) :
    initialiser debut à [-n,-n+1,...,-1]
    initialiser fin  à [-n+1,...,0]
    ecart = 1
    tant que ecart > d:
        pour tout 0<=k<=(n-1) :
            poser c = (debut[k]+fin[k])/2
            si fonction_n(n,c)>0 :
                debut[k] = c
            sinon :
                fin[k] = c
   retourner [[debut[k],fin[k]] pour k parcourant {0,...,n-1}]
```

i. Écrivons le code python correspondant :

```
def approx_sol(n,d) :
    debut=[i for i in range(-n,0,-1)]
    fin=[i for i in range(-n+1,1,-1)]
    ecart = 1
    while ecart > d:
        for k in range(n) :
            c = (debut[k]+fin[k])/2
            if fonction_n(n,c)>0 :
                debut[k] = c
            else :
                fin[k] = c
return [[debut[k],fin[k]]  k parcourant {0,...,n-1}]
```

ii. La valeur de retour de ce code correspond à une liste L de listes $I_k = [a_k, b_k]$ où $a_k \leq x_k \leq b_k$, $|a_k - b_k| \leq d$ et x_k est une solution de (E_n). On a ainsi des approximations des n premières solutions de l'équation (E_n). Il nous manque la plus grande.

4. **Des inégalités utiles.**

(a) Démontrer que pour tout réel $x > 1$: $\dfrac{1}{x} \leq \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \leq \dfrac{1}{x-1}$.

On pourra remarquer que : $\forall t \in [x-1, x]$, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x-1}$ et utiliser la croissance de l'intégrale.

(b) Soit $x > 0$. En remarquant que

$$\forall k \in \{1, 2, \dots, n\},\ \frac{1}{x+k} \leq \ln\left(\frac{x+k}{x+k-1}\right) \leq \frac{1}{x+k-1}.$$

établir que :

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + 1 \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) \leq f_n(x) - \frac{1}{x+n} + 1$$

puis que

$$\ln\left(1+\frac{n}{x}\right)+\frac{1}{x+n}-1\leq f_n(x)\leq \ln\left(1+\frac{n}{x}\right)+\frac{1}{x}-1.$$

Correction

(a) Soit $x>1$. Par décroissance de la fonction inverser sur $\mathbb{R}^{+\star}$:

$$\forall t\in[x-1,x],\ \frac{1}{x}\leq\frac{1}{t}\leq\frac{1}{x-1}.$$

Par croissance de l'intégrale et en intégrant les inégalités sur $[x-1,x]$, on en déduit que

$$\int_{x-1}^{x}\frac{1}{x}dt\leq\int_{x-1}^{x}\frac{1}{t}dt\leq\int_{x-1}^{x}\frac{1}{x-1}dt.$$

D'où

$$\frac{1}{x}\leq\ln(x)-\ln(x-1)\leq\frac{1}{x-1}.$$

Autrement dit,

$$\frac{1}{x}\leq\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\leq\frac{1}{x-1}.$$

Les inégalités étant établies pour un $x>1$ arbitraire, on en déduit que

$$\boxed{\forall x>1,\ \frac{1}{x}\leq\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)\leq\frac{1}{x-1}}.$$

(b) Soit $x>0$. Pour tout $k\in\{1,2,\dots,n\}$, $x+k>1$. Donc d'après la question 5.a, on en déduit que

$$\forall k\in\{1,2,\dots,n\},\ \frac{1}{x+k}\leq\ln\left(\frac{x+k}{x+k-1}\right)\leq\frac{1}{x+k-1}.$$

En sommant ces inégalités pour k décrivant $\{1,2,\dots,n\}$, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k}\leq\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{x+k}{x+k-1}\right)\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k-1}. \tag{I}$$

Or :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x+k}=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{x+k}\right)-\frac{1}{x}+1-1=\underline{f_n(x)-\frac{1}{x}+1}.$$

De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\tfrac{x+k}{x+k-1}\right)&=\sum_{k=1}^{n}\left(\ln(x+k)-\ln(x+k-1)\right)\\&=\ln(x+n)-\ln(x)\qquad\text{(somme télescopique)}\\&=\ln\left(\tfrac{x+n}{x}\right)\\&=\underline{\ln\left(1+\tfrac{n}{x}\right)}\end{aligned}.$$

Enfin,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\tfrac{1}{x+k-1}&=\sum_{l=0}^{n-1}\tfrac{1}{x+l}\qquad\text{(changement de variable l=k-1)}\\&=\sum_{l=0}^{n}\tfrac{1}{x+l}-\tfrac{1}{x+n}-1+1\\&=\underline{f_n(x)-\tfrac{1}{x+n}+1}\end{aligned}.$$

En reprenant l'inégalité (I), on obtient

$$\boxed{f_n(x)-\frac{1}{x}+1\leq\ln\left(1+\frac{n}{x}\right)\leq f_n(x)-\frac{1}{x+n}+1}.$$

En considérant l'inégalité de gauche :

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + 1 \leq \ln(1 + \frac{n}{x}),$$

on obtient

$$\underline{f_n(x) \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x} - 1.}$$

De même,

$$\ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) \leq f_n(x) - \frac{1}{x+n} + 1.$$

D'où

$$\underline{\ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x+n} - 1 \leq f_n(x).}$$

Il en résulte que

$$\boxed{\ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x+n} - 1 \leq f_n(x) \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x} - 1.}$$

5. **Équivalent de la plus grande des solutions quand n tend vers $+\infty$.**
   Pour tout $n \geq 1$, on note x_n la plus grande des solutions de (E_n).
   (a) Expliciter x_1 puis montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $1 < x_n < 2n$. On rappelle que $\ln(\frac{3}{2}) < 0,41$ et que $\ln(3) > 1$.
   (b) Écrire une fonction `approx_x(n,d)` qui prend en argument un entier $n \geq 1$ un réel $d > 0$ et qui renvoie une liste de deux réels $[a, b]$ vérifiant $a \leq x_n \leq b$ et $|b - a| \leq d$.
   (c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $1 - \dfrac{1}{x_n} \leq \ln\left(1 + \dfrac{n}{x_n}\right) \leq 1 - \dfrac{1}{x_n + n}$.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $x_n \geq \dfrac{n}{e^1 - 1}$.
   (e) Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $\left(\ln\left(1 + \dfrac{n}{x_n}\right)\right)_{n\geq 1}$ admettent des limites (finies ou infinies) et les calculer.
   (f) Prouver enfin l'existence d'un réel δ, que l'on explicitera vérifiant : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \delta \cdot n$.

Correction

(a) D'après la question 1.b, la plus grande solution de (E_1) est égale à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a donc $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, qui est bien strictement compris entre 1 et 2.
Soit $n > 1$. D'après la question 4b :

$$\forall x > 0, \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x+n} - 1 \leq f_n(x) \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x} - 1.$$

Or 1 et $2n$ sont strictement positifs. D'où

$$\ln(1+n) + \frac{1}{1+n} - 1 \leq f_n(1), f_n(2n) \leq \ln(\frac{3}{2}) + \frac{1}{2n} - 1.$$

Or $n \geq 2$. Donc $\ln(1+n) + \frac{1}{1+n} - 1 \geq \ln(3) - 1 > 0$ et $\ln(\frac{3}{2}) - 1 + \frac{1}{2n} \leq \ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} < 0$. De ces inégalités, on en déduit que

$$f_n(1) > 0, f_n(2n) < 0.$$

Par stricte décroissance de f_n sur $]0, +\infty[$, on en déduit que $\boxed{1 < x_n < 2n}$, l'existence étant prouvé dans la partie 2.

(b) Voici le programme correspondant :

```
def approx_x(n,d) :
    a = 1
    b = 2*n
    while (b-a)> d :
        c = (a+b)/2
        if fonction_n(n,c) > 0 :
            a = c
        else :
            b = c
  return [a,b]
```

(c) Fixons $n \geq 1$. Sachant que $2n > x_n > 1$, on en déduit à l'aide de l'inégalité de la question 4b :

$$\ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right)+\frac{1}{x_n+n}-1 \leq f_n(x_n) \leq \ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right)+\frac{1}{x_n}-1..$$

Or par définition, $f_n(x_n)=0$. D'où

$$\ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right)+\frac{1}{x_n+n}-1 \leq 0 \leq \ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right)+\frac{1}{x_n}-1..$$

En manipulant la première inégalité, on obtient :

$$\ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right) \leq 1+\frac{1}{x_n+n}.$$

En manipulant la deuxième inégalité, on a

$$\frac{1}{x_n}-1 \leq \ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right).$$

D'où

$$\boxed{1-\frac{1}{x_n} \leq \ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right) \leq 1-\frac{1}{x_n+n}}.$$

(d) Soit $n \geq 1$. D'après la question 5c, on a

$$\ln(1+\frac{n}{x_n}) \leq 1-\frac{1}{x_n+n} \leq 1.$$

Donc

$$\ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right) \leq 1.$$

Par croissance de la fonction exponentielle, on en déduit que

$$1+\frac{n}{x_n} \leq e^1.$$

D'où

$$0 < \frac{n}{x_n} \leq e^1-1.$$

Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^{+\star}$

$$\frac{x_n}{n} \geq \frac{1}{e^1-1}.$$

D'où

$$\boxed{x_n \geq \frac{n}{e^1-1}}.$$

(e) D'après la question 5d :

$$\forall n \geq 1, x_n \geq \frac{n}{e^1-1}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e^1-1} = +\infty$. Donc par comparaison de limites, $\underline{\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty}$.
D'après la question 5c :

$$\forall n \geq 1, 1-\frac{1}{x_n} \leq \ln\left(1+\frac{n}{x_n}\right) \leq 1-\frac{1}{x_n+n}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty$. D'où $\lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{x_n} = 1, \lim_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{x_n+n} = 1$. D'après le théorème des gendarmes, on en déduit que

$$\underline{\lim_{n\to+\infty} \ln(1+\frac{n}{x_n}) = 1.}$$

(f) Par continuité de la fonction exponentielle, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{n}{x_n} = e.$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{x_n} = e^1 - 1.$$

Autement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{e^1-1}}{x_n} = 1.$$

En posant $\delta = \frac{1}{e^1-1}$, on a bien

$$\boxed{x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \delta \cdot n}.$$