DS 5 mathématiques

BCPST 1B 2019-2020

— Durée : 3 heures.
— Documents et calculatrice non autorisés.
— Une importance est accordée à la clarté, à la concision et à la précision de la rédaction.

Problème B : étude de suites

Pour tout entier $n \geq 1$, on définit l'équation (E_n) par : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x+2} + \ldots + \dfrac{1}{x+n} = 1$.
L'objectif du problème est d'étudier les solutions de ces équations.
À cet effet, on introduit la fonction f_n, de la variable réelle x définie par :

$$f_n(x) \quad = \quad \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x+k} \right) - 1.$$

1. **Étude d'un cas particulier.**
   Pour cette question seulement, on prend $n = 1$.
   (a) Donner le domaine de définition de f_1, dresser le tableau de variations de f_1.
   (b) Résoudre l'équation (E_1).
2. **Dénombrement des solutions de (E_n).**
   On fixe un entier naturel $n \geq 1$.
   (a) Donner le domaine de définition de la fonction f_n.
   (b) On suppose dans cette question $n = 5$. Dresser le tableau de variations complet de f_n sur $\mathbb{R}$. On placera également les différentes limites.
   (c) Faire de même pour f_n avec n quelconque. On donnera le tableau avec une brève justification.
   (d) En déduire que (E_n) a exactement $n + 1$ solutions réelles.
3. **Informatique.**
   (a) Écrire une fonction Python `fonction_n(n,x)` qui prend en argument un entier naturel $n \geq 1$, un réel x dans le domaine de D_{f_n} et qui renvoie la valeur $f_n(x)$.
   Dans la suite, on supposera que la fonction `fonction_n` est définie.
   (b) On considère la fonction suivante :

```
def precision(n,d) :
    a = -1
    b = 0
    while (b-a)> d :
        c = (a+b)/2
        if fonction_n(n,c) > 0 :
            a = c
        else :
            b = c
  return [a,b]
```

   i. Écrire la valeur de retour de l'instruction `fonction_n(2,1/4)`.
   ii. Modifier le code précédent pour que la valeur de retour soit une liste $[a, b]$ vérifiant $|b-a| \leq d$ et $-2 \leq a \leq b \leq -1$.

(c) On aimerait écrire une fonction `approx_sol(n,d)` qui prend en argument un entier $n \geq 1$ et un réel strictement positif `d` et qui renvoie une liste de listes de réels L où pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ la liste $L[k]$ est de la forme $[a_k, b_k]$ avec $|b_k - a_k| \leq d$ et $k - n \leq a_k \leq b_k \leq k - n + 1$. On propose le pseudo-code pour la fonction `approx_sol` :

```
approx_sol(n,d) :
    initialiser debut à [-n,-n+1,...,-1]
    initialiser fin  à [-n+1,-n+2,...,0]
    ecart = 1
    tant que ecart > d:
        pour tout 0<=k<=(n-1) :
            poser c = (debut[k]+fin[k])/2
            si fonction_n(n,c)>0 :
                debut[k] = c
            sinon :
                fin[k] = c
   retourner [[debut[k],fin[k]] pour k parcourant {0,...,n-1}]
```

i. Traduire en Python le pseudo-code précédent.

ii. À quoi correspond la valeur de retour de `approx_sol` ?

4. **Des inégalités utiles.**

(a) Démontrer que pour tout réel $x > 1$: $\dfrac{1}{x} \leq \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right) \leq \dfrac{1}{x-1}$.

On pourra remarquer que : $\forall t \in [x-1, x]$, $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{t} \leq \frac{1}{x-1}$ et utiliser la croissance de l'intégrale.

(b) Soit $x > 0$. En remarquant que

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \frac{1}{x+k} \leq \ln\left(\frac{x+k}{x+k-1}\right) \leq \frac{1}{x+k-1}.$$

établir que :

$$f_n(x) - \frac{1}{x} + 1 \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) \leq f_n(x) - \frac{1}{x+n} + 1$$

puis que

$$\ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x+n} - 1 \leq f_n(x) \leq \ln\left(1 + \frac{n}{x}\right) + \frac{1}{x} - 1.$$

5. **Équivalent de la plus grande des solutions quand n tend vers $+\infty$.**

Pour tout $n \geq 1$, on note x_n la plus grande des solutions de (E_n).

(a) Expliciter x_1 puis montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $1 < x_n < 2n$. On rappelle que $\ln(\frac{3}{2}) < 0,41$ et que $\ln(3) > 1$.

(b) Écrire une fonction `approx_x(n,d)` qui prend en argument un entier $n \geq 1$ un réel $d > 0$ et qui renvoie une liste de deux réels $[a, b]$ vérifiant $a \leq x_n \leq b$ et $|b - a| \leq d$.

(c) Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a : $1 - \dfrac{1}{x_n} \leq \ln\left(1 + \dfrac{n}{x_n}\right) \leq 1 - \dfrac{1}{x_n + n}$.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$: $x_n \geq \dfrac{n}{e^1 - 1}$.

(e) Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $\left(\ln\left(1 + \dfrac{n}{x_n}\right)\right)_{n\geq 1}$ admettent des limites (finies ou infinies) et les calculer.

(f) Prouver enfin l'existence d'un réel δ, que l'on explicitera vérifiant : $x_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \delta \cdot n$.