DS 6 mathématiques : durée 2 heures

Exercice 1. On rappelle que si P est un polynôme et $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n)}$ désigne la dérivée $n-$ième de P. On définit les suites de polynômes $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n(X) = (X^2-1)^n, L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} U_n^{(n)}(X).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$ le nombre $a_k(n)$ désigne le coefficient devant X^k du polynôme L_n. Ainsi, on a :

$$L_n(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} a_k(n) X^k.$$

1. Calculer L_0, L_1, L_2.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, expliciter les racines de U_n et leur ordre de multiplicité.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de U_n et de L_n.
4. Justifier sans calcul que pour tout $n \in \mathbb{N}$, 1 et -1 ne sont pas racines de L_n.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, calculer $(X^n)^{(k)}$.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, développer U_n.
7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire L_n sous la forme $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_{n-2k}(n) X^{n-2k}$. On écrira les $a_{n-2k}(n)$ comme des produits et quotients de puissances, coefficients binomiaux. Quel est la valeur du coefficient dominant de L_n ?

Correction

1. On a : $\boxed{L_0 = 1, L_1 = X, L_2 = \frac{3}{2}X^2 - \frac{1}{2}}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Dans le cas où $n = 0$, U_n n'a pas de racine. Sinon, on a $U_n(X) = (X^2-1)^n = (X-1)^n(X+1)^n$. On en déduit que les racines de U_n sont exactement 1 et -1 et leur ordre de multiplicité est exactement égal à n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le degré de U_n est égal à $2n$ car produit de $2n$ facteurs de degré 1. Le degré de L_n est égal à n. En effet, L_n et $U_n^{(n)}$ ont le même degré. Mais le degré de $U_n^{(n)}$ est égal à $2n - n$ c'est-à-dire n.
4. Remarquons que tout nombre complexe α racine de L_n est racine de $U_n^{(n)}$ et réciproquement. Or 1 et -1 étant des racines d'ordre de multiplicité exactement n, on en déduit que

$$\forall k \in \{0,1,\dots,n-1\} U_n^{(k)}(1) = U_n^{(k)}(-1) = 0, U_n^{(n)}(1) \neq 0, U_n^{(n)}(-1) \neq 0.$$

5. Soient n, k deux entiers naturels.
   - Cas 1 : $n < k$.

$$\boxed{(X^n)^{(k)} = 0}.$$

   - Cas 2 : $n \geq k$.

$$\boxed{(X^n)^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k}}.$$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$, en appliquant la formule du binôme, on obtient :

$$\boxed{U_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^{2n-2k}}.$$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question 6 :

$$U_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k X^{2n-2k}.$$

En dérivant n fois, on obtient :

$$U_n^{(n)}(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} X^{n-2k}.$$

Donc en multipliant par $\frac{1}{2^n n!}$, on en déduit que

$$L_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2^n n!} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} X^{n-2k}.$$

D'où

$$\boxed{L_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} (-1)^k \binom{2n-2k}{n-2k} X^{n-2k}}.$$

Le coefficient dominant est donc $\frac{1}{2^n}\binom{2n}{n}$.

Exercice 2. On fixe N_r et N_v deux entiers naturels supérieurs à 5. Soit une urne U contenant exactement N_r boules rouges et N_v boules vertes. On effectue l'expérience (E) suivante : on pioche sans remise une à une cinq boules de l'urne tout en notant leur couleur C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. L'ensemble des configurations possibles est noté Ω, et on représente un élément de Ω par une $5-$ liste de $\{R, V\}$. Par exemple, (R, R, V, V, R) correspond au résultat où la première boule piochée est rouge, la deuxième est rouge, la troisième est verte, la quatrième est verte, la dernière est rouge.

Dans la suite, l'événement $(C_i = R)$ (respectivement $(C_i = V)$) désigne l'événement "la i-ème boule est rouge (respectivement verte)". Pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, A_k désigne l'événement "parmi les 5 boules tirées exactement k boules sont rouges". L'objectif est de calculer les probabilités des A_k et de démontrer une identité remarquable à l'aide du calcul des probabilités.

Pour alléger la notation, l'expression $(C_1 = c_1, C_2 = c_2, C_3 = c_3, C_4 = c_4, C_5 = c_5)$ désigne l'événement

$$((C_1 = c_1) \cap (C_2 = c_2) \cap (C_3 = c_3) \cap (C_4 = c_4) \cap (C_5 = c_5)),$$

où les c_i désignent les couleurs possibles des boules c'est-à-dire R ou V.

Pour simplifier la partie informatique, on représentera une boule rouge par un 0 et une boule verte par un 1.

1. (INFO). Écrire une fonction python `experience(Nr,Nv)` qui prend en argument deux entiers naturels et renvoie une liste de taille 5 d'éléments de $\{0, 1\}$ qui correspond aux résultats d'une simulation de l'expérience (E).
2. (INFO).Écrire une fonction python `nombre(Nr,Nv)` qui prend en argument deux entiers naturels et renvoie un entier naturel k qui correspond au nombre dans de boules rouges obtenues dans une simulation de l'expérience (E).
3. Calculer les probabilités $P(C_1 = R, C_2 = R, C_3 = V, C_4 = V, C_5 = R), P(C_1 = V, C_2 = R, C_3 = V, C_4 = R, C_5 = R)$.
4. Expliciter tous les éléments de A_3.
5. Montrer que $P(A_3) = \binom{5}{3} \frac{N_r(N_r-1)(N_r-2)N_v(N_v-1)}{(N_r+N_v)(N_r+N_r-1)\dots(N_r+N_n-4)}$ puis que $P(A_3) = \frac{\binom{N_r}{3}\binom{N_v}{2}}{\binom{N_r+N_v}{5}}$.
6. De la même façon, il est possible de montrer que $\forall k \in \{0, \dots, 5\}, P(A_k) = \frac{\binom{N_r}{k}\binom{N_v}{5-k}}{\binom{N_r+N_v}{5}}$. En admettant ce résultat et en montrant au préalable que la famille $(A_k)_{0 \le k \le 5}$ forme un système complet d'événements, prouver que

$$\sum_{k=0}^{5} \binom{N_r}{k} \binom{N_v}{5-k} = \binom{N_r + N_v}{5}.$$

Correction

1. (INFO).

```
import random as rd
def experience(Nr,Nv) :
    L=[]
    for i in range(5) :
        a = rd.randint(1,Nr+Nv)
        if a <= Nr :
            L.append(0)
            Nr = Nr-1
        else :
            L.append(1)
            Nv = Nv-1
    return L
```

2. (INFO).

```
def nombre(Nr,Nv) :
    L = experience(Nr,Nv)
    k = 0
    for i in range(5) :
        if L[i] == 0 :
            k = k + 1
    return k
```

3. Calculons les probabilités demandés à l'aide de la formule des probabilités composées :

$$P(C_1=R,C_2=R,C_3=V,C_4=V,C_5=R) = P(C_1=R)P(C_2=R|C_1=R)P(C_3=V|C_1=R,C_2=R) \cdot P(C_4=V|C_1=R,C_2=R,C_3)V)P(C_5=R|C_1=R,C_2=R,C_3=V,C_4=V).$$

Les tirages étant sans remise, on peut donc déterminer chacune de ces probabilités conditionnelles qui correspondent à une proportion après un certain nombre de tirages dont on connaît les résultats. D'où :

$$P(C_1=R,C_2=R,C_3=V,C_4=V,C_5=R) = \frac{N_r}{(N_r+N_v)}\frac{N_r-1}{(N_r+N_v-1)}\frac{N_v}{(N_r+N_v-2)}\frac{N_v-1}{(N_r+N_v-3)}\frac{N_r-2}{(N_r+N_v-4)}.$$

De la même façon,

$$P(C_1=V,C_2=R,C_3=V,C_4=R,C_5=R) = \frac{N_v}{(N_r+N_v)}\frac{N_r}{(N_r+N_v-1)}\frac{N_v-1}{(N_r+N_v-2)}\frac{N_r-1}{(N_r+N_v-3)}\frac{N_r-2}{(N_r+N_v-4)}.$$

4. A_3 contient exactement les 10 éléments suivants :

$$(R,R,R,V,V),(R,R,V,R,V),(R,R,V,V,R),(R,V,R,R,V),(R,V,R,V,R),$$
$$(R,V,V,R,R),(V,R,R,R,V),(V,R,R,V,R),(V,R,V,R,R),(V,V,R,R,R).$$

5. Les singletons de A_3 étant incompatibles deux à deux et leur réunion étant égal à A_3, on a

$$P(A_3) = \sum_{t\in A_3} P(t).$$

En effectuant des calculs similaires à ceux de la question 3, on constate que tout élément de A_3 a pour probabilité :

$$\frac{N_r(N_r-1)(N_r-2)N_v(N_v-1)}{(N_r+N_v)(N_r+N_r-1)\dots(N_r+N_n-4)}.$$

De plus, A_3 contient exactement 10 éléments et 10 est égal à $\binom{5}{3}$. D'où

$$P(A_3) = \binom{5}{3}\frac{N_r(N_r-1)(N_r-2)N_v(N_v-1)}{(N_r+N_v)(N_r+N_r-1)\dots(N_r+N_n-4)}.$$

En réécrivant à l'aide de quotient de factoriels :

$$P(A_3) = \frac{5!}{3!2!}\frac{\frac{N_r!}{(N_r-3)!}\frac{N_v!}{(N_v-2)!}}{\frac{(N_v+N_r)!}{(N_v+N_r-5)!}}.$$

D'où :

$$P(A_3) = \frac{\frac{N_r!}{3!(N_r-3)!}\frac{N_v!}{2!(N_v-2)!}}{\frac{(N_v+N_r)!}{(N_v+N_r-5)!5!}}.$$

En réécrivant à l'aide de coefficients binomiaux,

$$\boxed{P(A_3) = \frac{\binom{N_r}{3}\binom{N_v}{2}}{\binom{N_r+N_v}{5}}}.$$

6. Montrons que la famille $(A_k)_{0\le k\le 5}$ forme un système complet d'événements.

- Montrons que les A_k sont incompatibles deux à deux :
  Soit $(i,j) \in \{0,\ldots,5\}^2$. Supposons que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Il existe donc un élément $L \in A_i \cap A_j$. Par définition de A_i, A_j L contient exactement i zéros et j zéros. Donc $i = j$.
  Ces événements sont bien deux à deux incompatibles.
- Montrons que $\bigcup_{k \in [|0,5|]} A_k = \Omega$.
  — Les A_k étant inclus dans Ω, leur réunion est donc inclus dans Ω.
  — Tout élément de Ω ayant un nombre de boules rouges comprises entre 0 et 5 d'après l'expérience (E), on en déduit que Ω est inclus dans $\bigcup_{k \in [|0,5|]} A_k = \Omega$.

  Par double inclusion, on en déduit l'égalité entre les deux ensembles.

La famille $(A_k)_{k \in [|0,5|]}$ est un système complet d'événements. Donc

$$\sum_{k=0}^{5} P(A_k) = 1.$$

D'où

$$\sum_{k=0}^{5} \frac{\binom{N_r}{k}\binom{N_v}{5-k}}{\binom{N_r+N_v}{5}} = 1.$$

Il en résulte que

$$\boxed{\sum_{k=0}^{5} \binom{N_r}{k}\binom{N_v}{5-k} = \binom{N_r+N_v}{5}}.$$

Exercice 3. Donner un équivalent sous la forme $f : x \mapsto Kx^\alpha$ avec $K \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$ de :

1. $f_1 : x \mapsto \frac{(1+2x)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos(x^2)-1}$ en 0
2. $f_2 : x \mapsto \ln(1+\sin(x))$ en 0
3. $f_3 : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\arctan(x)$ en $+\infty$
4. $f_4 : x \mapsto \left(1+x^2\right)^{\frac{1}{4}} - \exp\left(\frac{x}{2}\right)$ en 0.

Correction

Donner un équivalent sous la forme $f : x \mapsto Kx^\alpha$ avec $K \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}$ de :

1. Lorsque x tend vers 0, $2x$ et x^2 tend vers 0. Donc avec les équivalents usuels, on obtient
$$f_1(x) \sim_0 \frac{\frac{2x}{3}}{\frac{-x^2}{2}} \sim_0 \boxed{-\frac{4}{3x}}.$$
2. Lorsque x tend vers 0, $\sin(x)$ tend vers 0. Or $\ln(1+u) \sim_0 u$. D'où
$$f_2(x) \sim_0 \sin(x).$$
Or $\sin(x) \sim_0 x$. D'où
$$\boxed{f_2(x) \sim_0 x}.$$
3. Soit $x > 0$. On a :
$$f_3(x) = \sin(\frac{1}{x})\left(1 + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\arctan(x)\right).$$
Lorsque x tend vers $+\infty$, $\frac{1}{x}$ tend vers 0. Donc :
$$\arctan(\frac{1}{x}) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}, \sin(\frac{1}{x}) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}.$$
D'où
$$\frac{\arctan(\frac{1}{x})}{\sin(\frac{1}{x})} \sim_{+\infty} 1.$$
Autrement dit, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(\frac{1}{x})}{\sin(\frac{1}{x})} = 1$. De plus,
$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$
Donc
$$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\arctan(x)\right) = 1 + \frac{\pi}{2} \neq 0.$$
D'où
$$\boxed{f_3(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}(1+\frac{\pi}{2})}.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$
\begin{aligned}
f_4(x) &= ((1+x^2)^{\frac{1}{4}} - 1) + (1 - \exp(\frac{x}{2})) \\
&= (1 - \exp(\frac{x}{2}))(\frac{((1+x^2)^{\frac{1}{4}} - 1)}{(1 - \exp(\frac{x}{2}))} + 1)
\end{aligned}
$$

.

Lorsque x tend vers 0, x^2 et $\frac{x}{2}$ tend vers 0. Donc

$$\frac{((1+x^2)^{\frac{1}{4}} - 1)}{(1 - \exp(\frac{x}{2}))} \sim_0 \frac{\frac{1}{4}x^2}{-\frac{x}{2}} \sim_0 -\frac{1}{2}x.$$

Donc $\lim_{x\to 0} \frac{((1+x^2)^{\frac{1}{4}}-1)}{(1-\exp(\frac{x}{2}))} = 0$. D'où $\lim_{x\to 0} \frac{((1+x^2)^{\frac{1}{4}}-1)}{(1-\exp(\frac{x}{2}))} + 1 = 1$. En passant aux équivalents, on en déduit que

$$\boxed{f_4(x) \sim_0 (-\frac{x}{2})}.$$