Exercice 1. On considère les propositions suivantes :

1. $P_1 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x > n$ 2. $P_2 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, x < n$ 3. $P_3 : \exists n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, x < n$

Déterminer les valeurs de vérité de $P_1, P_2, P_3, (P_1 \implies P_2) \implies P_3$ et de $P_1 \implies (P_2 \implies P_3)$.

Exercice 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n = \left\{(k,l) \in \mathbb{N}^2 | k+l \leq n\right\}$.

1. Soit $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que si $n_1 \leq n_2$ alors $A_{n_1} \subset A_{n_2}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Décrire le complémentaire de A_n dans A_{n+1}.

Exercice 3. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $S_n \leq 2\sqrt{n}$.

Exercice 4. On dit qu'une partie $\mathcal{E}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est stable par intersection si : $\forall (A,B) \in \mathcal{E}^2, A \cap B \in \mathcal{E}$.

1. Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des parties de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$?

   (a) $A_1 = \mathbb{N}$ (b) $A_2 = \{\{i\}, i \text{ décrit } \mathbb{N}\}$ (c) $A_3 = \mathcal{P}(\mathbb{N})$

2. On pose $\mathcal{A} = \{A \subset \mathbb{N}, |A| \leq 4\}$ et $\mathcal{B} = \{B \subset \mathbb{N}, |B| \geq 4\}$.
   Le ou lesquels des deux est stable par intersections ? Justifier vos réponses.

Exercice 5. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

Exercice 6. On rappelle qu'un segment $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est défini par l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} | (x \geq a) \wedge (x \leq b)\}$

1. Soient S_1, S_2 deux segments de réels. Montrer que $S_1 \cap S_2$ est un segment.
2. Soient S_1, S_2 deux segments de réels. Montrer que $S_1 \cup S_2$ est un segment si et seulement si $S_1 \cap S_2$ est non vide.