

Révisions

V.Vong

Analyse

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{aligned} u_0 &= 1 \\ u_{n+1} &= 1 + \frac{1}{u_n} \end{aligned}$$

1. Étudier la fonction $x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$.
2. Déterminer le signe de $1 + \frac{1}{x} - x$ suivant la valeur de x .
3. Étudier les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$
4. En déduire que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 2. Déterminer un équivalent sous la forme de $\lambda n^\alpha q^n$ de

$$1. e^{\frac{1}{n}} - 1, \quad 2. \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad 3. \frac{3^n + 2^n}{n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)} \quad 4. \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right) \frac{n^3 + n + 1}{n^2 + 1}$$

Exercice 3. Justifier que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée :

$$1. x \mapsto \frac{\ln(x)}{1+x^2} \quad 2. x \mapsto (1+x+x^2)^{x+x^2} \quad 3. x \mapsto x \exp\left(\frac{x+1}{x-1}\right).$$

Algèbre

Exercice 4. Résoudre le système suivant dans \mathbb{C} :

$$\begin{cases} x & -my & +m^2z & = & 2m \\ mx & -m^2y & +mz & = & 2m \\ mx & +y & -m^2z & = & 1-m \end{cases}$$

Exercice 5. On s'intéresse à une famille $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes, les polynômes de Tchebytcheff qui sont définis de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta). \quad (1)$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n vérifiant (1).
2. Calculer T_0, T_1 .
3. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n .
6. Déterminer les racines de T_n et factoriser celui-ci.

Exercice 6. Déterminer le cardinal de

1. l'ensemble des parties de $\{1, \dots, 20\}$ comportant au moins un 4.
2. l'ensemble des parties de $\{1, \dots, 20\}$ à 12 éléments comportant au moins un 4.
3. l'ensemble des permutations de taille 20 tels que le 3 est en position 7.
4. l'ensemble des permutations de taille 20 tels que les nombres de 1 à 10 sont positionnés dans les places de 1 à 10.
5. l'ensemble des 45-uplets comportant uniquement des 0 et des 1 dont la somme est égal à 18.
6. l'ensemble des 45-uplets comportant uniquement des 0 et des 1.