Révisions

V.Vong

Analyse

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{array}{lcl} u_0 & = & 1 \\ u_{n+1} & = & 1+\frac{1}{u_n} \end{array}$$

1. Étudier la fonction $x \mapsto 1+\frac{1}{x}$.
2. Déterminer le signe de $1+\frac{1}{x}-x$ suivant la valeur de x.
3. Étudier les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$
4. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Correction

1. La fonction (que l'on note f) est dérivable sur $\mathbb{R}^\star$ car somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^\star$ et on a
$$\forall x>0, f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$
Donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$.
2. Soit $x>0$. On a
$$\begin{array}{rcl} f(x)-x \geq 0 & \Leftrightarrow & 1+\frac{1}{x}-x \geq 0 \\ & \Leftrightarrow & x+1-x^2 \geq 0 \end{array}$$
On reconnaît une inéquation du second degré. Déterminons les racines de $-X^2+X+1$. On a $\Delta = 5$. Donc $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{-2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{-2} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. On en déduit que sur $\mathbb{R}^{+\star}$,
$$f(x)-x \geq 0 \Leftrightarrow x \in]0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}].$$
3. Calculons les premiers termes : $u_0 = 1, u_1 = 2, u_2 = \frac{3}{2}, u_3 = 1+\frac{2}{3} = \frac{5}{3}$. Montrons que la suite (u_n) est strictement positif. Soit $n \in \mathbb{N}$. on pose
$$P(n) : u_n > 0.$$
$P(0)$ vraie. On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n+1)$ vraie. On a $u_{n+1} = 1+\frac{1}{u_n}$ qui est une somme de termes strictement positif. Donc $u_{n+1} > 0$. Donc $P(n+1)$ vraie. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive.
Montrons que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. On pose
$$P(n) : u_{2n-2} \leq u_{2n}, u_{2n-1} \geq u_{2n+1}.$$
$P(1)$ est vraie. On suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Montrons que $P(n+1)$ est vraie. D'après $P(n)$, on a
$$u_{2n-1} \geq u_{2n+1} > 0$$
f étant décroissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, d'où
$$f(u_{2n-1} \leq f(u_{2n+1}).$$
Autrement dit
$$0 < u_{2n} \leq u_{2n+2}$$
Par décroissance de f sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit que
$$f(u_{2n}) \geq f(u_{2n+2}).$$

D'où
$$u_{2n+1} \geq u_{2n+3}.$$
Donc $P(n+1)$ est vraie.
D'après le principe de récurrence, on en déduit que la suite $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
La suite (u_{2n+1}) étant décroissante et minorée par 0, on en déduit que la suite (u_{2n+1}) est convergente. Déterminons sa limite. On a
$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+3} = f(f(u_{2n+1})) = 1 + \frac{1}{f(u_{2n+1}} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{u_{2n+1}}} = \frac{2u_{2n+1}+1}{u_{2n+1}+1}$$
Par continuité de $f \circ f$, on en déduit que la limite l vérifie
$$l = \frac{2l+1}{l+1} \Leftrightarrow l(l+1) = 2l+1 \Leftrightarrow l^2 - l - 1 = 0$$
On en déduit que $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $l = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Or $l \geq 0$, car la suite est positive. Donc la limite de la suite (u_{2n+1}) est $l = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{2n+2} = f(u_{2n+1})$. Or la suite (u_{2n+1}) converge vers l. Par continuité de f sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit que (u_{2n+2}) converge vers $f(l) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4. Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) étant toutes deux convergentes vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, on en déduit que la suite $(u_{n\in\mathbb{N}})$ converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Exercice 2. Déterminer un équivalent sous la forme de $\lambda n^\alpha q^n$ de

1. $e^{\frac{1}{n}} - 1$, 2. $\arctan(\frac{1}{n^2})$ 3. $\frac{3^n+2^n}{n^2\sin(\frac{1}{n})}$ 4. $\ln(1+\frac{1}{2^n})\frac{n^3+n+1}{n^2+1}$

Correction

1. La fonction exp est dérivable en 0. donc $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Donc $\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} \sim 1$. D'où $e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n}$.
2. La fonction arctan est dérivable en 0 donc$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$. Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$. Donc $\frac{\arctan(\frac{1}{n^2})}{\frac{1}{n^2}} \sim 1$. D'où $\arctan \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$.
3. De la même manière, $\sin(\frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$, donc $\frac{3^n+2^n}{n^2\sin(\frac{1}{n})} \sim \frac{3^n+2^n}{n} \sim \frac{3^n}{n}(1+(\frac{2}{3})^n) \sim \frac{3^n}{n}$.
4. De même, $\ln(1+\frac{1}{2^n})\frac{n^3+n+1}{n^2+1} \sim \frac{1}{2^n}\frac{n^3}{n^2} \sim \frac{n}{2^n}$.

Exercice 3. Justifier que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée :

1. $x \mapsto \frac{\ln(x)}{1+x^2}$ 2. $x \mapsto (1+x+x^2)^{x+x^2}$ 3. $x \mapsto x\exp(\frac{x+1}{x-1})$.

Correction

1. quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^{+\star}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.
$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1+x^2-2\ln(x)x^2}{x(1+x^2)^2}.$$
2. $f'(x) = \frac{(2x+1)}{x^2+x+1}((x^2+x+1)\ln(x^2+x+1)+x^2+x)(x^2+x+1)^{x^2+x}$.
3. $f'(x) = \frac{x^2-4x+1}{(x-1)^2}\exp(\frac{x+1}{x-1})$.

Algèbre

Exercice 4. Résoudre le système suivant dans $\mathbb{C}$:
$$\begin{cases} x & -my & +m^2z & = & 2m \\ mx & -m^2y & +mz & = & 2m \\ mx & +y & -m^2z & = & 1-m \end{cases}$$

Correction

$$\left\{\begin{array}{llllll} x & -my & +m^2z & = & 2m \\ mx & -m^2y & +mz & = & 2m \\ mx & +y & -m^2z & = & 1-m \end{array}\right.$$

En appliquant $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$, on obtient

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & -my & +m^2z & = & 2m \\ & & (m-m^3)z & = & 2m(1-m) \\ & (1+m^2)y & -m^2(m+1)z & = & 1-m-2m^2 \end{array}\right.$$

En échangeant L_2 et L_3,

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & -my & +m^2z & = & 2m \\ & (1+m^2)y & -m^2(m+1)z & = & 1-m-2m^2 \\ & & (m-m^3)z & = & 2m(1-m) \end{array}\right.$$

On procède par disjonction de cas.

— Cas 1 : $m = 0$.
  On obtient $S = \{(0, 1, t), t \in \mathbb{R}\}$.

— Cas 2 : $m = 1$.
  On obtient $S = \{(1, -1 + t, t), t \in \mathbb{R}\}$.

— Cas 3 : $m = -1$. $S = \emptyset$.

— Cas 3 : $m \neq 1, -1, 0$.
  $S = \{(\frac{m(m^2+3)}{(m+1)(m^2+1)}, \frac{1-m}{1+m^2}, \frac{2}{1+m}\}$.

Exercice 5. On s'intéresse à une famille $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes, les polynômes de Tchebytcheff qui sont définis de la manière suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta). \tag{1}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme T_n vérifiant (1).
2. Calculer T_0, T_1.
3. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a
$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2\cos(a)\cos(b).$$
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré de T_n.
6. Déterminer les racines de T_n et factoriser celui-ci.

Correction

1. Unicité sous réserve d'existence :
   Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe T_n et U_n tel que :
$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos(\theta)) = U_n(\cos(\theta)).$$
   Donc
$$\forall x \in [-1, 1], (T_n - U_n)(x) = 0.$$
   Donc $T_n - U_n$ admet une infinité de racines. Donc $T_n - U_n$ est le polynôme nul. Autrement dit $T_n = U_n$.
   Existence : soit $\theta \in \mathbb{R}$.
$$\cos(n\theta) = \Re(e^{in\theta}) = \Re((e^{i\theta})^n) = \Re((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n).$$
   En développant, on en déduit que
$$\cos(n\theta) = \Re(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \sin(\theta)^k \cos(\theta)^{n-k}).$$
   Comme on considère la partie réelle, on ne garde dans la somme que les indices pairs. En effectuant le changement de variables $k = 2k'$, on obtient
$$\cos(n\theta) = \sum_{k'=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{k'} \sin(\theta)^{2k'} \cos(\theta)^{n-2k'}$$

D'où

$$\cos(n\theta) = \sum_{k'=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{k'} (1-\cos(\theta)^2)^{k'} \cos(\theta)^{n-2k'}$$

Donc en posant $T_n(X) = \sum_{k'=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^{k'} (1-X^2)^{k'} X^{n-2k'}$, on obtient $\cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$.

2. $T_0 = 1$, $T_1 = X$.
3. En appliquant les formules de trigonométries, on trouve

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b).$$

4. Soit $n \geq 1$. On a

$$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta).$$

D'où

$$T_{n+1}(\cos(\theta)) = 2(XT_n)(\cos(\theta)) - T_{n-1}(\cos(\theta)).$$

On en déduit que

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}.$$

En reindexant, on obtient

$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

5. Par récurrence, on en déduit que T_n est de degré n. De plus pour $n \geq 1$, on a également le coefficient dominant égal à 2^{n-1}.
6. Déterminons les racines de T_n. Soit $n \geq 1$:

$$T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta).$$

On a

$$\begin{aligned} \cos(n\theta) = 0 &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n\theta = \tfrac{\pi}{2} + k\pi \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \theta = \tfrac{(2k+1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

On sait que la fonction cos est injective sur $[0, \pi]$. Pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, les éléments $\cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont donc distincts deux à deux. On a donc déterminé n racines différentes deux à deux de T_n. Ce polynômes étant de degré, n, on en déduit que

$$\forall n \geq 1, T_n(X) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (X - \cos(\frac{(2k+1)\pi}{2n})).$$

Exercice 6. Déterminer le cardinal de

1. l'ensemble des parties de $\{1, \cdots, 20\}$ comportant au moins un 4.
2. l'ensemble des parties de $\{1, \cdots, 20\}$ à 12 éléments comportant au moins un 4.
3. l'ensemble des permutations de taille 20 tels que le 3 est en position 7.
4. l'ensemble des permutations de taille 20 tels que les nombres de 1 à 10 sont positionnés dans les places de 1 à 10.
5. l'ensemble des 45-uplets comportant uniquement des 0 et des 1 dont la somme est égal à 18.
6. l'ensemble des 45-uplets comportant uniquement des 0 et des 1.

Correction

1. Cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des parties de $\{1, \cdots, 20\} \setminus \{4\}$ qui est de cardinal 2^{19}.
2. La même bijection nous donne que cet ensemble est en bijection avec l'ensemble des parties de $\{1, \cdots, 20\} \setminus \{4\}$ ayant 11 éléments qui est de cardinal $\binom{19}{11}$.
3. La position 7 étant fixée par un 3, il reste à placer les autres lettres sans répétition, ce qui donne 19!.
4. De 1 à 10 on place les lettres de 1 à 10. Donc de 11 à 20 on place les lettres de 11 à 20. Ce qui donne un couple de permutations de taille 10. L'ensemble de ces permutations est de cardinal $10!^2$.
5. La somme étant égale à 18 on en déduit qu'il y a exactement 18 1 et 27 0. Il faut et il suffit donc de choisir la position des 1 pour construire un tel n uplet. On en déduit que cet ensemble est de cardinal $\binom{45}{18}$.
6. On a donc des 45-listes de $\{0, 1\}$ avec répétitions ce qui donne 2^{45} possibilités.